

Nichtstandardmathematik

Boris Haase

14. Auflage

Nichtstandardmathematik

Boris Haase

10. Mai 2026

L in größter Dankbarkeit gewidmet

Mathematics Subject Classification [mathematische Inhaltsklassifikation]: 03H05 [Nichtstandardmodelle der Mathematik], 03E15 [Deskriptive Mengenlehre], 54G20 [Allgemeine Topologie: Gegenbeispiele], 11-XX [Zahlentheorie], 51M05 [(Allgemeine) euklidische Geometrie und Verallgemeinerungen], 90CXX [Mathematische Programmierung], 65-XX [Numerische Analysis] und 68-XX [Informatik].

Zusammenfassung

Der Beitrag vertieft das Verständnis die mathematische Unendlichkeit zu quantifizieren. Offene und abgeschlossene Mengen erweisen sich als nicht haltbar. Die korrekte Verwendung der Bijektion macht einige Ergebnisse obsolet, die auf dem Mächtigkeitbegriff beruhen. Elemente unendlicher Mengen werden neu gezählt. Die Fueter-Pólya-Vermutung ist zu korrigieren. Neben dem Hauptsatz der Mengenlehre gilt eingeschränkt die Jacobi-Vermutung, der Satz vom Igel jedoch nicht. Das Maßproblem wird gelöst. Exakte Integrale bzw. Ableitungen gelten auch für unstetige Funktionen und (herkömmlich nicht) messbare Mengen, teilweise ohne den Holomorphie-Begriff heranzuziehen, und münden in die Hauptsätze. Die Begriffe Konvergenz und Stetigkeit werden neu gefasst. Hierbei stellen sich gleichmäßige Konvergenz und (Hölder-)Stetigkeit als entbehrlich heraus. Das Cauchy-Produkt wird korrigiert und die Sätze von Liouville und Picard sowie der Identitätssatz und der Riemannsche Umordnungssatz werden widerlegt. Der Archimedische Satz löst das gleichnamige Axiom ab. Der verschärfte Primzahlsatz und die Vermutung von Singmaster und Giuga werden elementar bewiesen. Leistungsfähig ist auch das Größte-Primzahl-Kriterium. Endlich wie unendlich algebraische Zahlen werden unterschieden und einschließlich ihrer Abstände, Approximation und Asymptotik bestimmt. Schranken- und Koeffizientensatz charakterisieren algebraische Zahlen neu. Es folgt die Widerlegung des Satzes von Thue-Siegel-Roth. Danach werden die starke Goldbachsche Vermutung und die von Alaoglu, Bunjakowski, Wilson, Erdős sowie Collatz als richtig aufgezeigt. Der Drei-Kuben-Satz, die Sätze von Beal, Catalan und Brocard werden elementar bewiesen. Die Nichtstandardmathematik widerlegt die herkömmlich beweisbare Littlewood-Vermutung. Die (verallgemeinerte) Riemannsche Vermutung erweist sich als haltlos. Einige Axiome der euklidischen Geometrie erweisen sich neu betrachtet als falsch bzw. überflüssig. Die Toeplitz-Vermutung wird widerlegt und diejenige von Fickett bewiesen. Auf den Beweis des Durchmessersatzes für Polytope folgen die schnelle Matrixmultiplikation und das LUX-, Intex- sowie Meritverfahren, die die lineare Algebra signifikant zu beschleunigen vermögen. Durch diskrete Fourier-Transformation lassen sich Taylorreihen neu ableiten, integrieren und umkehren sowie Nullstellen von Polynomen bestimmen - auch durch ein Fixpunktverfahren. Werden Ableitungen durch Funktionswerte an den sogenannten Kronpunkten ersetzt, lassen sich der Approximationsatz anwenden und analytische Differentialgleichungen effizient lösen. Dann folgt das Sortierverfahren Bitsort, nach dem der Haltesatz bewiesen wird und die Gleichheit der Komplexitätsklassen P und NP. Zum Schluss werden Anwendungen der Euler-Maclaurin-Formeln in der theoretischen Physik vorgestellt.

14., verbesserte und erweiterte Auflage

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Mengenlehre	6
3	Topologie	9
4	Nichtstandardanalysis	10
5	Zahlentheorie	20
6	Euklidische Geometrie	24
7	Lineare Optimierung	25
8	Wissenschaftliches Rechnen	33
9	Theoretische Informatik	38
10	Theoretische Physik	41
	Lebenslauf	55
	Anhang: FastShift-Verfahren	56
	Symbolverzeichnis	58
	Literaturverzeichnis	59

Abkürzungsverzeichnis

AZ	algebraische Zahl
CO	Crossover
FFT	Fast-Fourier-Transformation
FSR	Fast-Shift-Recursive
FTD	Fast-Toeplitz-Dekomposition
GPK	Größte-Primzahl-Kriterium
GR	geometrische Reihe
GW	geschlossener Weg
KI	Kurvenintegral
KR	Kronreihe
LP	lineares Programm
NR	Nachbarschaftsrelation
SF	Stammfunktion
TR	Taylorreihe

1 Einleitung

Die im Folgenden erzielten Ergebnisse in den Teilgebieten Mengenlehre, Topologie, Nichtstandardanalysis, Zahlentheorie, euklidische Geometrie, lineare Optimierung, wissenschaftliches Rechnen und theoretische Informatik sind außergewöhnlich! Bekannte Aussagen und grundlegende im Folgenden nicht definierte Begriffe wie Axiom, Körper usw. werden wie in der einschlägigen Literatur oder bei Wikipedia beschrieben vorausgesetzt. Daher werden hier nur abweichende oder klarstellende Definitionen gegeben.

Eingeklammerte Satzteile sind abweichend vom herkömmlichen Gebrauch der näheren Erläuterung sowohl optional als auch gültig. Unter Verzicht auf Trivialitäten und aus Gründen wie Folgen des Ruhms werden Beweise nicht stets vollständig ausgeführt sowie mit \square abgeschlossen, Definitionen dagegen mit \triangle . Der größte Exponent des Arguments eines Polynoms ist sein Grad. Minimalpolynome lassen sich mit ganzzahligen Koeffizienten (statt rationalen) wie durchweg im Folgenden angeben.

Vorüberlegung: Die Endlichkeit der Welt bereitet der Behandlung des Unendlichen (mit dem Infinitesimalen als Kehrwert und dual zum Endlichen) gewisse Schwierigkeiten. Ein Bezug auf philosophische Begriffe ist berechtigt, da sich Mathematik metasprachlich nicht allein aus sich selbst erklären lässt und Abstrakta nach dem Prinzip der Wissenschaftlichkeit die allgemeinsten Aussagen liefern. Die vollständige Zerlegung unendlicher Mengen beinhaltet einen sukzessiven nicht abschließbaren Prozess.

Der schwer vermittelbare abrupte Übergang von endlichen zu unendlichen Zahlen erfordert mittendliche. Die Existenz aktual oder nur potenziell unendlicher Mengen bleibt offen, da die Transzendenz des Unendlichen einen Beweis versagt. Aus der fast „verschwenderischen“ Größe bzw. Expansion des Universums lässt sich auf eine Verfügbarkeit des Seienden schließen, der keine erkennbaren Grenzen gesetzt sind.

Solche Schlüsse sind allerdings schwächer als die Abduktion. Wird eine endliche Strecke in unendlich viele Teile zerlegt, liegt das Unendliche endlich begrenzt vor. Ist darüber hinaus die Anzahl der Teile beider Unendlichkeiten *gleich*, liegt mathematisch eine Isomorphie vor: Die Vergrößerung der unendlich kleinen Teile der endlichen Strecke auf endliche Strecken ergibt im größeren Maßstab die Unendlichkeit im herkömmlichen Sinne bezogen auf das Gesamte. Dies erschließt leicht eine Bijektion im mathematischen Sinne.

Rationale Zahlen sind reell, setzen ein Minimalpolynom vom Grad 1 auf 0 und haben zum Teil periodische Nachkommastellen. Ist der Grad ≥ 2 , handelt es sich um rein algebraische Zahlen mit unendlichen Zählern und Nennern. Endliche reelle Brüche bilden mit den unendlichen bzw. rein komplexen Brüchen bereits alle reellen bzw. komplexen Zahlen. Nicht als endlicher Bruch abbrechende reelle Kettenbrüche sind algebraisch (herkömmlich transzendent!), da sie einen unendlichen Nenner besitzen.

Ein Beginn mit der Menge der herkömmlich natürlichen Zahlen ermöglicht durch (herkömmlich und unendliche natürliche) Induktion zu zeigen, dass nach Cantor bis in jede beliebige Potenz diagonalisiert werden kann. Werden Hilberts Translationen ins Unendliche zu Hilfe genommen, sind alle (!) unendlichen Mengen gleichmächtig zur Menge der herkömmlich natürlichen Zahlen. Die Anzahlen der Mengen natürlicher und ganzer Zahlen unterscheiden sich aber fast genau um den Faktor 2.

Die Algebra lehrt, dass Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier herkömmlicher algebraischer Zahlen von natürlichem Grad m bzw. n algebraisch maximal vom Grad mn sind und die $1/m$ -te Potenz einer herkömmlichen algebraischen Zahl vom Grad n ebenfalls algebraisch maximal vom Grad mn ist. Ist die Algebraizität einer Zahl zu untersuchen und der Rest durch den Grenzwert einer Nullfolge (a_n) gegeben, ist das Weglassen der Folgenwerte für große n nicht erlaubt. Sie sind entscheidend.

Eine unendliche reelle Zahl kann aus einem endlichen Kettenbruch bestehen mit unendlich großem letztem Nenner. Würde sie einer herkömmlich rationalen Zahl gleichgesetzt, indem der letzte Teilbruch entfernt würde, so wäre sie gleichzeitig Lösung einer linearen Gleichung mit (unendlichen) ganzen Koeffizienten. Keine (unendliche) Teilmenge der komplexen Zahlen ist abgeschlossen. (Endliche) Definitionen eignen sich besser als Axiome: Sie bieten deutliche Handhabungsvorteile und sind traditionell.

Werden Bijektionen korrekt behandelt, liegen anzahlmäßig zwischen der Menge der herkömmlich natürlichen Zahlen und der der herkömmlich reellen Zahlen unendlich viele Mengen. Damit erhält die Kontinuumshypothese eine neue Antwort. Die Definition der reellen Zahlen durch Dedekindsche Schnitte oder Äquivalenzklassen von reellen Cauchy-Folgen ist überflüssig. Die Mengenlehre insgesamt ist natürlich umfangreicher, da hier nur wesentliche (neue) Gedanken präsentiert werden.

Eine Kreisscheibe ohne ihren Rand stellt herkömmlich eine offene Menge dar, weil dann jeder Punkt von ihr eine herkömmliche Umgebung hat, die ganz in dieser Menge liegt. Werden nacheinander die Punkte auf einer Halbgeraden vom Kreisscheibenmittelpunkt bis zum Rand betrachtet, muss es auf dieser Halbgeraden hin immer eine echte Umgebung für jeden Punkt geben.

Diese bisherige Vorstellung negiert jedoch „das Ende der Fahnenstange“, demzufolge jede solche Halbgerade einen Punkt im Inneren der Kreisscheibe ohne herkömmliche Umgebung dort aufweisen muss. Somit ist der Offenheitsbegriff bei Mengen untauglich (vgl. [10], S. 36). Wird die Einheitskreisscheibe um den Koordinatenursprung betrachtet, so ist der letzte Punkt der Halbgeraden $[0, 1[$ dual dargestellt der Punkt $0, \bar{1}_2$ und der nächste Punkt ist der Randpunkt 1. Dazwischen liegt kein weiterer Punkt.

Daher ist jede Kreisscheibe ohne Rand zugleich abgeschlossen, weil die betrachteten Endpunkte der Halbgeraden gerade den Abschluss als Rand bilden. Da auf ihrem Rand keine Umgebung existiert, ist auch jede abgeschlossene Menge im euklidischen Raum sinnlos. Jede offene Menge ist dort zugleich abgeschlossen. Diese Absurdität verstört, wenn die infinitesimalen Größen differenziert betrachtet, also insbesondere die Zahlen 1 (rational!) und $0, \bar{1}_2$ (algebraisch!) nicht gleichgesetzt werden.

Genauso absurd ist der unendliche Durchschnitt offener Mengen wie der aller offenen konzentrischen Kreisscheiben, die eine abgeschlossene Menge bilden kann, genauer: den gemeinsamen Kreisscheibenmittelpunkt. Eine unendliche Vereinigung abgeschlossener Mengen kann eine offene Menge wie eine offene Kreisscheibe als Vereinigung aller deren Punkte als abgeschlossenen Mengen bilden. Eine 0-dimensionale Menge (Punkt) ist offen, weil hier jede Umgebung ebenfalls aus einem Punkt besteht.

Deshalb ist sogar die leere Menge \emptyset abgeschlossen und als Folge der gesamte euklidische Raum, was sich bei Kugeln auf höhere Dimensionen verallgemeinern lässt. Dieser Spezialfall macht auch den allgemeinen Fall absurd bzw. sinnlos: Die Betrachtung von offenen bzw. abgeschlossenen Mengen eignet sich bei metrischen und topologischen Räumen nicht. Insbesondere mutet die herkömmliche Definition des topologischen Raumes seltsam inhaltsleer und willkürlich an und macht sie fragwürdig.

Das Zulassen infinitesimaler Radien macht die Begriffe innerer bzw. äußerer Punkt sowie Randpunkt jedoch sinnvoll. Der herkömmliche Irrationalitätsbeweis von $\sqrt{2}$ ist problematisch, da das Quadrat der zugeordneten rationalen Zahl (mit unendlichem Zähler und Nenner) nicht existiert. Thema sind auch herkömmlich nicht messbare, mitt- und unendliche Mengen sowie unstetige Funktionen. Jede probabilistische Aussage ist erst gewiss, wenn alle ihre relevanten Möglichkeiten verifiziert wurden.

Die Gegenläufigkeitsregel besagt auch im Komplexen, dass bei zu unstetigen Funktionen für die Integration über identische Wege in positiver und negativer Umlaufrichtung der gleiche (!) Funktionswert von beiden möglichen auszuwählen ist. Dies vermeidet einen anderen signifikanten Wert, sodass der Wert des Integrals über beide Richtungen gerade 0 ist. Der Satz von Stokes lässt sich auch allgemein beweisen (vgl. [17], S. 625 f.). Funktionswerte können Werte überspringen, die dann nicht gemessen werden.

Die herkömmliche Differentiation und Integration verwischen durch herkömmliche Grenzwertbildung die genaue Unterscheidung von Rationalität und reiner Algebraizität. Dies ist z. B. für die exakte Bestimmung von Nullstellen problematisch. Daher lässt sich die herkömmliche Analysis in der bestehenden Form nicht aufrechterhalten und benötigt gangbare Alternativen. Die Periode 2π muss Sinus und Kosinus definieren, da deren Potenzreihen nur für endliche Argumente konvergieren.

Das exakte Volumenintegral hat gegenüber herkömmlichen die einfachste Handhabung. Seine uneigentliche Form ergibt sich analog. Das Zusammenfassen von Funktionswerten zu endlich vielen davon erlaubt auch das Integral für unstetige Funktionen zu berechnen. Hierbei bieten sich u. a. die beiden Euler-Maclaurin-Formeln oder eine geeignete Landau-Notation an. Beachtenswert ist, dass Stetigkeit bei Integral und Ableitung nicht vorausgesetzt wird. Dies ermöglicht eine entsprechende Definition.

Liegt das Ergebnis der Differentiation außerhalb des Definitionsbereiches D , so werde es durch die zu ihm am dichtesten liegende Zahl innerhalb von D ersetzt. Ist diese nicht eindeutig bestimmt, so bestehe das Ergebnis aus (einer von) mehreren Zahlen (z. B. nach einer einheitlichen Regel). Das exakte Integral ist allgemeiner gültig als z. B. Riemann- oder Lebesgue-(Stieltjes-)Integral. Letztere existieren nur in herkömmlich messbaren Mengen. Extrapolationen können Knickstellen aufdecken.

Das Verwenden von $1/\infty$ statt 0 vermeidet die Division durch 0 und eine vage Grenzwertbildung, aber erfordert genau zu überlegen, wo überall das Ersetzen sinnvoll ist und wie potenziert wird, um Widersprüche bei einem Symbolwechsel zu vermeiden. Es gestattet auch Integral und Differential für jede Operation auf den reellen und komplexen Zahlen so zu definieren, dass jede Funktion überall dort zumindest als Richtungsableitung integrierbar und differenzierbar ist, wo die Funktionswerte bestimmt sind.

Die Definition des exakten Integrals über eine Rechteckregel kann Fehlerabschätzungen erfordern (vgl. [7], [8] und [26]). Soll Integrieren als Umkehren der Ableitung über bloßes Summieren hinausgehen, macht es nur für stetige Funktionen Sinn. Der zu Nachfolger duale Begriff Vorgänger wird meist nicht noch einmal eigens erwähnt, sondern ist mitzudenken. Nur drei Beispiele der Nichtstandardanalysis verdeutlichen deren Überlegenheit und die Stärke der Verwendung infinitesimaler bzw. unendlicher Werte.

Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz erlauben Summen bei korrektem Rechnen (mit den Landau-Symbolen) beliebig umzusummieren. Der Riemannsche Umordnungssatz gilt nicht, da sich das Kommutativgesetz auch im Unendlichen nicht aushebeln lässt: Werden einzelne Summanden im Unendlichen nicht weiter berücksichtigt bzw. vernachlässigt, liegt Willkür vor.

(Im Komplexen) erlaubt die diskrete Fouriertransformation die Koeffizienten von Taylorreihen besonders leicht in äquivalenten Kronreihen zu berechnen. Dies gestattet eine effiziente Zahlenrepräsentation und deren Berechnung. Funktionen lassen sich als Vektor bzw. Produkt der Fourier-Matrix mit einem Vektor von festen Funktionswerten an den sogenannten Kronpunkten bestimmen, die kreisförmig um einen Entwicklungspunkt angeordnet sind, der effektiv gewählt werden sollte.

Das genannte Produkt lässt sich vor der Berechnung mit einer frei wählbaren Genauigkeit speichern, die für Computerberechnungen am besten der Kehrwert einer Zweierpotenz ist. Da es sich schnell berechnen lässt und Taylorreihen mit dem Horner-Schema realisiert werden können, ist diese Methode (insbesondere als Fast-Fourier-Transformation-Version) sehr effizient. Hierbei werden Matrizen durch Tensoren ersetzt und Beträge über die Signumfunktion berücksichtigt oder Abschnitte gebildet.

Geeignete Matching-Verfahren ermöglichen fließende Übergänge einzelner Abschnitte. Die notwendige Umkehrbarkeit von Operatoren wie bei der Adomian-Dekomposition entfällt. Die Taylorreihe des integrierten Logarithmus erlaubt als geometrische Reihe eine einfache Implementation des multiplikativ Inversen. Die genauen Ableitungsregeln brauchen hierbei nicht bekannt zu sein. Die lineare Algebra kann vergleichbar effizient analytische Differentialgleichungen mithilfe von Kronreihen numerisch lösen.

Dieses Buch basiert auf ISO 80000-2:2019 (Größen und Einheiten – Mathematik). Die herkömmliche, zu ausladende und weniger intuitive, da historisch gewachsene Notation von Summen (Σ), Produkten (Π), Differentialen (d und ∂), Integralen (\int) und Wurzeln ($\sqrt{\quad}$) wird vermieden. Der Minimalitätssatz erklärt die Wahl von 2 als Basis (auch für am häufigsten im Binärsystem arbeitende Digitalrechner). In der Praxis (der Informatik) helfen oft hinreichend kleine formale Systeme.

Das kombinierte LUX-Verfahren, welches in 35 Jahren entwickelt wurde und (z. B. mithilfe von Gomory-Schnitten) Hilberts zehntes Problem positiv beantwortet, kann jedes lösbare lineare Programm in quadratischer Zeit lösen. Ist kein Missbrauch für intransparente oder schlechte Entscheidungen zu befürchten, werden Implementierungsdetails veröffentlicht. Die schnelle Matrixmultiplikation übertrifft sogar den Strassen-Algorithmus und erlaubt das rasche Lösen von linearen Gleichungssystemen.

Für Schönheit und Eleganz in der Mathematik lässt sich sorgen, indem das Darzustellende hinreichend durchdacht und ohne zu geizen auf die klare Essenz reduziert wird, die beide begründet und Kennzeichen des Wahren ist. Leider gibt es viel hässliches Langes in der mathematischen Welt. Es bleibt zu hoffen, dass dieses Buch viel Vergnügen mit der Nichtstandardmathematik und Einblick in das wahre Gute und Schöne verschaffen kann. Wer daran Gefallen findet, verwirkliche beide selbst!

2 Mengenlehre

Definition: Eine *Entität* ist alles, was als *Seiendes* unterscheidbar ist. Eine *Menge* S ist eine Gesamtheit von Entitäten, den *Elementen*, deren Anzahl mit $|S|$ notiert wird. Nur die leere Menge \emptyset enthält keine Elemente. Eine Menge $S \neq \emptyset$ heißt genau dann *endlich* (andernfalls *unendlich*), wenn sie sich vollständig in Teilmengen zerlegen lässt, bei denen jede Teilmenge die aufgerundete Hälfte der verbliebenen Elemente enthält. Sei ν die größte *endliche*, ω dazwischen die größte *mittendliche* und ι die kleinste positive reelle Zahl. Δ

Herkömmlich definieren hinlänglich bekannte Axiome die reellen Zahlen als linear geordneten Körper und die komplexen Zahlen mit der imaginären Einheit $\underline{1}$ (gesprochen „im 1“) als Körper. Analog lassen sich Addition, Multiplikation und deren Inversenbildung in deren umfassendste und per Definition abgeschlossenen Oberkörper \mathbb{R} bzw. $\mathbb{C} := \mathbb{R} + \underline{\mathbb{R}}$ (mit weiteren Operationen wie bspw. der Potenzierung) fortführen. Jede Zahl aus \mathbb{C}^* mit unendlichem Betrag ihres Kehrwertes heißt *infinitesimal*.

Auf die Darstellung der Peano-Axiome und der Körperaxiome wird hier bewusst verzichtet, um anschaulich zu bleiben und das Neue herauszustellen. Zwei Zahlen müssen einen Minimalabstand besitzen, da *alle* verschiedenen Zahlen von \mathbb{R} durch einen Abstand getrennt sind. Die gegenteilige Annahme, dass das Minimum nicht fest ist, führt auf den Widerspruch, dass jede Zahl aus \mathbb{R} mindestens einen nächsten Nachbarn als Zahl haben muss, der selbst in \mathbb{R} liegt (vgl. die Isomorphie oben).

Die Menge \mathbb{R} aller reellen Zahlen ist isomorph zu einer Menge (hyper-)natürlicher bzw. ganzer Zahlen. Sie hat sowohl ein festes minimales als auch ein festes maximales Element, da von einer ganzheitlichen und vollständigen Betrachtung von \mathbb{R} ausgegangen wird. Hieraus folgt zusammen mit den Körperaxiomen ihre Abgeschlossenheit. Andernfalls wäre eventuell die bisherige Theorie immer wieder an die Gegebenheiten anzupassen. Als Folgen notierte Zahlen sind schlichtweg unhandlich (vgl. [19], S. 15 f.).

Cantor hat viele Mengen als gleichmächtig angesehen. Seine Unterscheidung zwischen lediglich abzählbaren und überabzählbaren Mengen ist nicht differenziert genug. Die richtige Betrachtung von Bijektionen ergibt ein anderes Bild. Das bisher um Ordinal- und Kardinalzahlen gemachte Aufheben entfällt, da es einen einfacheren Weg gibt: Die *konsequente* Erweiterung der reellen Zahlen.

Definition: Die aus sukzessivem Addieren von 1 zu 0 entstehenden Elemente ergeben die *Menge aller natürlichen Zahlen* $\mathbb{N} := \mathbb{N}^* \cup \{0\}$. Die Zahlen aus $\underline{\mathbb{R}}^*$ heißen *rein komplex*. Das Entfernen der zusammengesetzten Zahlen von $\mathbb{N}_{\geq 2}$ ergibt die *Primzahlen* \mathbb{P} , die *ganzen Zahlen* \mathbb{Z} ergeben sich durch $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}^*$ und die *reellen Zahlen* \mathbb{R} durch die Brüche mit Zähler aus \mathbb{Z} und Nenner aus \mathbb{N}^* . Der *Minimalabstand* von 0 ist ι . \mathbb{R} umfasst hyperreelle und surreale Zahlen. Die Zahlen ν, ω und $1/\iota$ haben für $n \in \mathbb{N}$ die Form 2^n . Δ

Definition: Sei $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ die *Boolesche Menge*. *Dekrement* und *Inkrement* von $a \in \mathbb{C}$ werden $\hat{a} := a - 1$ bzw. $\hat{a} := a + 1$ notiert und der *Kehrwert* von $u \in \mathbb{C}^*$ ist $\tilde{u} := 1/u$. Gesprochen werden sie „a dek“, „a ink“ und „kehr u“. Ferner werden $\hat{a} := 2a, \check{a} := a/2$ und $a^- := -a$ „a dach“, „halb a“ bzw. „a neg“ gesprochen. Der Logarithmus von $a \in {}^\omega\mathbb{C} \setminus {}^\omega\mathbb{R}_{\leq 0}$ zur Basis $b \in {}^\nu\mathbb{R}_{> 0}$ wird mit ${}_b a$ notiert und gesprochen „b log a“. Gilt $\sigma \in \{\nu, \omega\}$ und $S^* = S^{*-1}$, seien ${}^\sigma S := S \cap [-\sigma, \sigma]$ für $S \subseteq \mathbb{R}$, ${}^\sigma \mathbb{C} := {}^\sigma \mathbb{R} + {}^\sigma \underline{\mathbb{R}} \subset \mathbb{C}$ und ${}^\sigma S := S \cap {}^\sigma \mathbb{C}$ für $S \subseteq \mathbb{C}$. Δ

Definition: Es gibt σ den maximalen Betrag der Zähler und τ den der Nenner aller $s \in {}^\sigma S \subset \mathbb{C}$ an. Die Mengen $\mathbb{M}_{\mathbb{R}} := {}^\omega \mathbb{R} \setminus {}^\nu \mathbb{R}$ und $\mathbb{M}_{\mathbb{C}} := \mathbb{M}_{\mathbb{R}} + \underline{\mathbb{M}}_{\mathbb{R}}$ ergeben die *mittendlichen* Zahlen. Bei reellen Mengen kann der Index \mathbb{R} entfallen. Enthalten zwei Mengen die gleichen Elemente, heißen sie genau dann *gleich* (Extensionalität). Die Menge Y heißt *Vereinigung* der Menge X , wenn sie genau die Elemente der Elemente von X als Elemente enthält. Die *Potenzmenge* der Menge X ist $\mathcal{P}(X) := \{Y : Y \subseteq X\}$. Δ

Bemerkung: Für Teilmengen von S gilt dies analog. Mit $T := {}^\sigma S \notin \{\emptyset, \{0\}\}$ gilt $T + T \not\subseteq T$ oder sogar $T \cdot T \not\subseteq T$. Die Mengen ${}^\omega S$ enthalten nur nicht-unendliche Elemente. Die Mengen ${}^\nu S$ entsprechen den herkömmlichen Mengen S . Die mittendlichen schließen die Lücke von endlichen zu unendlichen Mengen.

Extremalsatz: Jede lineare Ordnung besitzt sowohl ein maximales als auch ein minimales Element, da alle anderen Konstellationen auf einen Widerspruch zur Totalität bzw. zu Obigem führen. \square

Bemerkung: Erst die eindeutige Konstruktion einer nicht endlichen Menge erlaubt deren Anzahl an Elementen korrekt zu bestimmen und den Bezug auf ${}^\omega \mathbb{N}$ als Basis. Bei mehreren Konstruktionsmöglichkeiten wird die plausibelste ausgewählt. Die Relation \in ist irreflexiv und asymmetrisch, \subseteq hingegen Teilordnung.

Definition: Die Summe $p(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$ mit $z \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}^*$ heißt *m*-Polynom, falls die Anzahl der Koeffizienten mit bspw. $a_k \in {}^v\mathbb{Z}$ oder $a_k \in {}^\omega\mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}_{<m}$ und $a_k \neq 0$ endlich ist, sonst *m*-Reihe. Es heißt $\deg(p) := \hat{m}$ für $a_k \neq 0$ der Polynom- bzw. Reihengrad von p . Für das Nullpolynom $p = 0$ sei $\deg(p) := -1$. Eine $p(z) = 0$ setzende Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird als Nullstelle und *m*-algebraische Zahl (AZ) bezeichnet. Alternierende Summen beginnen mit \pm und negieren den zweiten Summanden. Bei \mp ist der erste Summand negiert. Δ

Definition: Für das Minimalpolynom $p(z)$ von $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $0 \neq p(\alpha) \approx 0$ gelte $\min |p(z)| = |p(\alpha)|$. Die Mengen dazu heißen $A := {}^m\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ im reellen Fall und ${}^m\mathbb{R}_{\mathbb{C}} \supset {}^m\mathbb{A}_{\mathbb{C}} \supset {}^m\mathbb{R}_{\mathbb{C}} \supset {}^m\mathbb{Z}_{\mathbb{C}} \supset {}^m\mathbb{N}_{\mathbb{C}}$ im komplexen. Für $a_{\deg(p)} = 1$ ergeben sich *m*-ganzalgebraische Zahlen. Die Notation für *m*-AZen ist $(m, a_k, a_{k-2}, \dots, a_1, a_0; r, i; \#n, \&q; v, p)_s$. Alle *k*-Minimalpolynome haben $<$ als Spezifikation s , alle *k*-Minimalreihen $>$. Δ

Definition: Mit $r \in {}^v\mathbb{N}^*(-{}^v\mathbb{N}^*)$ existieren eine Nullstelle mit dem r -größten ($|r|$ -betragskleinsten) Realteil > 0 (< 0), mit $r = 0, i \in {}^v\mathbb{N}^*(-{}^v\mathbb{N}^*)$ eine nicht-reelle Nullstelle mit dem i -größten ($|i|$ -betragskleinsten) Imaginärteil > 0 (< 0) und die restlichen AZen analog. Wird für mindestens ein a_j eine Variable eingesetzt, gibt $\#n$ die Anzahl $n \in {}^v\mathbb{N}^*$ der Nullstellen an und $\&q$ die Anzahl $q \in {}^v\mathbb{N}$ der mehrfachen Nullstellen. Δ

Bemerkung: Hierbei hat r Vorrang vor i und stellt sich mit $r = i = a_0 = 0$ die Zahl 0 dar. Der numerische Wert v hat die Genauigkeit p . Der Verzicht auf Unterscheidung mehrfacher Nullstellen erlaubt diejenigen eines *k*-Polynoms oder einer *k*-Reihe mit ganzzahligen Koeffizienten streng totalzuordnen. Die Angaben $r, i, \#n, \&q, v, p$ und s sind ggf. entbehrlich wie für Brüche. Die $(v + 2)$ -Tupel $(0, \dots, 0, a_k, \dots, a_0; r, i)_<$ mit $a_j \in {}^v\mathbb{N}$ wohlordnen die AZen lexikalisch streng.

Beispiele: Die Zahlen $(v; 1, 0, 0, -1)_<$ sind gegeben als $1, -1, \underline{1}$ und $-\underline{1}$. Die Goldene Zahl $\Phi := \sqrt{5} + 5/2$ lässt sich mit $(v; 1, -1, -1; 1, 0; 1, 618033, 10^{-6})_<$ notieren. Mit $p = 10^{-\omega}$ gilt $\bar{9} \neq 0, \bar{1} = 0, 1 \dots 1$, da $9 \times 0, \bar{1} = 0, 9 \dots 9 = 1 - 10^{-\omega} \neq 1$ ist. Somit ist $0, \bar{1}$ - notierbar als $(\omega, 9 \times 10^\omega, 1 - 10^\omega)$ - nicht ω -algebraisch.

Bemerkung: Es seien $m \in {}^v\mathbb{N}$ der maximal zugelassene Polynomgrad und $n \in {}^v\mathbb{N}$ der maximale Betrag, den die ganzzahligen Koeffizienten a_k der Polynome $a_m x^m + a_{\hat{m}} x^{\hat{m}} + \dots + a_1 x + a_0$ mit $k \in {}^v\mathbb{N}_{\leq m}$ annehmen sollen. Dies ist gerechtfertigt, da die a_k voreinander nicht ausgezeichnet sind. Die Anzahl der AZen entspricht der Anzahl der Nullstellen der derart definierten normierten irreduziblen Polynome: Der größte gemeinsame Teiler ggT von deren Koeffizienten ist 1 und es gilt $a_m > 0$ und $a_0 \neq 0$.

Inklusionssatz: Jede Menge $S \neq \emptyset$ falsifiziert $S \in S, \mathcal{P}(S) \subseteq S$ und jede Isomorphie $T \cong S$ für $T \subset S$.

Beweis: Jede Menge unterscheidet sich von ihren Elementen, da sie letztere umfasst. So ist $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. Ihre Differenzmenge weist die Elemente mit fehlendem Partnerelement für die Bijektion auf. \square

Folgerung: Dies widerlegt insbesondere Dedekind-Unendlichkeit und Cantors erstes Diagonalargument (s. [3], S. 80 f.), da \mathbb{N} eine echte Teilmenge von \mathbb{R} ist. Ein Verlagern nach hinten der vorne ausgeschlossenen Zahlen macht das zweite haltlos. Gleiches gilt für das Cantorsche, das Russell-Zermelosche und das Banach-Tarski-Paradoxon. Hilberts Hotel widerlegt die Translation, die aus einer unendlichen Menge immer herausführt wie die Nachfolgerabbildung $s : {}^\omega\mathbb{N} \rightarrow {}^\omega\mathbb{N}^* \cup \{\hat{\omega}\}$ aus ${}^\omega\mathbb{N}$.

Definition: *Zyklenfreiheit* bezeichnet die Abwesenheit zyklischer Folgen von Mengen, bei denen jeweils eine als Element in der vorangegangenen enthalten ist. *Ersetzbarkeit* bezeichnet den möglichen Übergang von einer Menge X bei einer eindeutigen Ersetzung jedes Elements von X durch eine beliebige Menge. Enthält die Menge Y genau ein Element aus jedem Element von X (Forderung der Auswählbarkeit), heißt sie *Auswahl* aus einer Menge X von paarweise disjunkten nichtleeren Mengen. Δ

Lemma: Wegen $\hat{v}m \leq 1 \leq a$ für alle $m \in {}^v\mathbb{N}$ und $a \in {}^v\mathbb{R}_{\geq 1}$ ist das Archimedische Axiom ungültig. \square

Archimedischer Satz: Es gibt ein $m \in {}^v\mathbb{N}$ mit $a < bm$ genau dann, wenn mit $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ für $a > b$ zumindest $a < bv$ gilt, da $v = \max {}^v\mathbb{N}$ ist. \square

Behauptung: Das Cantor-Polynom $P(m, n) := \hat{2}((m + n)^2 + 3m + n)$ bildet ${}^\omega\mathbb{N}^2$ bijektiv auf ${}^\omega\mathbb{N}$ ab.

Widerlegung: Es gilt $P(\omega, \omega) = \hat{\omega}\hat{\omega} > \omega = \max {}^\omega\mathbb{N}$. \square

Bemerkung: Ebenso wird die Fueter-Pólya-Vermutung widerlegt. Wird die Menge ${}^{\omega}\mathbb{N}^2$ durch $\{(m, n) \in {}^{\omega}\mathbb{N}^2 : m + n \leq k \in {}^{\omega}\mathbb{N}\}$ mit $k(k+3) = \hat{\omega}$ ersetzt, gilt die Behauptung. Da es unendlich viele Mengen mit Anzahl der Elemente zwischen ${}^{\nu}\mathbb{N}$ und ${}^{\nu}\mathbb{R}$ gibt, ist auch die Kontinuumshypothese falsch: Durch Abbilden allzu vieler (unendlicher) Mengen aufeinander lassen sie sich nicht mehr auseinanderhalten.

Fundierungssatz: Wird $X := \{x_m : x_0 := \{\emptyset\}, x_{\omega} := \{x_1\}$ und $x_n := \{x_n\}$ mit $m \in {}^{\omega}\mathbb{N}$ und $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 2}$ gesetzt, garantiert erst die Forderung des Fundierungsaxioms Zyklensfreiheit, dass jede nichtleere Teilmenge $X \subseteq Y$ ein Element x_0 enthält, sodass X und x_0 disjunkt sind. \square

Bemerkung: Mit $x_{\omega} := \{x_0\}$ statt $x_{\omega} := \{x_1\}$ ist X eine unendliche Kette. Die hier vertretene Mengenlehre wird durch die Definitionen oben festgelegt. Sie kommt ohne echte Klassen (vgl. [3], S. 117 f.) aus, da nur sinnvolle Mengen betrachtet werden. Die existierende Menge W aller Welten ist unveränderlich, weil sie sonst der Vollständigkeit widerspräche. Dies bedeutet jedoch nicht, dass Veränderungen in den Welten nicht existieren oder alles determiniert ist. Hierbei hilft es die Zeit räumlich zu betrachten.

Definition: Sei \mathbb{U} die *Fuzzy-Menge*, \mathbb{Q} die Menge der *Quaternionen*, \mathbb{O} die der *Oktonionen* und \mathbb{S} die der *Sedenionen*. Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ heißen zwei verschiedene Punkte x und y einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{K}^n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ *benachbart*, wenn mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ für alle Punkte $z \in M$ gilt: $\|x - y\| \leq \max\{\|x - z\|, \|y - z\|\}$. Haben alle benachbarten Punkte von $M \subseteq \mathbb{K}^n$ den Minimalabstand $h \in \mathbb{R}_{>0}$, wird M als *h-homogen* mit der Notation h - M bezeichnet. Im Fall $h = \iota$ heißt M *lückenlos*. Es gilt die Isomorphie $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Δ

Definition: Für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ sei $a \uparrow_{f(w)}$ das f -Mittel mit Funktion f von a_1, \dots, a_n (evtl. mit Gewichtsvektor $w \in [0, 1]^n$) bzw. Hölder-Mittel zur Stufe $r \in {}^{\nu}\mathbb{R}^*$ statt f . Gesprochen wird \uparrow „mitt“. Sei weiter $u \uparrow_n := (u, \dots, u)^T \in {}^{\omega}\mathbb{K}^n$. Es wird $u \uparrow_n$ „ u rep n “ gesprochen. Existiert zu jedem $x \in \mathbb{K}^n$ ein Punkt $y \in M$ mit $\|x - y\| = \iota$, heißt eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{K}^n$ *dicht* in \mathbb{K}^n . Für das punktsymmetrische \mathbb{K}^n zu \mathbb{K}^n legt das Produkt ${}^{\sigma}\mathbb{R}^n := \prod_{k=1}^n {}^{\sigma}\mathbb{R}$ einen n -Würfel mit Seitenlänge σ fest und ${}^{\sigma}\mathbb{R}^n$ eine n -Kugel mit Radius σ . Δ

Bemerkung: Das h -Homogenisieren trägt h vom Ursprung aus in jeder Dimension ab. Zwischen Zahlen liegende Elemente sind auf die nächstgelegenen h -homogenen Elemente zu runden. Hierbei geben die Logarithmen zur Basis 2 (s. Nichtstandardanalysis) ${}_{2\nu} \log_2 \omega$ oder ${}_{2\tilde{\iota}}$ die maximale Anzahl der Vor- wie Nachkommastellen der Elemente von ${}^{\tilde{\nu}}\mathbb{R}$, ${}^{\tilde{\omega}}\mathbb{R}$ und $(\iota)\mathbb{R}$ an. Das Erdős-Ulam-Problem löst der folgende Satz, der irrationale Zahlen als nicht-existent sowie \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} und \mathbb{C} als h -homogen ausweist.

Hauptsatz der Mengenlehre: Die Menge \mathbb{R} ist ein maximaler, linear geordneter, abgeschlossener, kontinuierlicher und ι -homogener Körper mit $|\mathbb{R}| = 2^{\tilde{\iota}^2 + 1}$, da der unbestimmt belassene Abstand ι Kontinuität garantiert und \mathbb{R} durch Identifikation von $\min \mathbb{R}$ mit $\max \mathbb{R}$ „verklebt“ werden kann. \square

Bemerkung: Teilmengen von \mathbb{K}^n lassen sich analog verkleben und damit für bestimmte Berechnungen abschließen. Da die Rekonstruktion reeller Zahlen mit notwendig periodischer Bruchentwicklung eindeutig ist, schränkt die h -Homogenität nicht wesentlich ein. Eine vollständige Homogenität (d. h. in allen Richtungen) höherdimensionaler reeller Räume ist leider unmöglich, wie eine einfache Überlegung zu Kreisen bzw. Kugeln zeigt - auch bei Aufrollen eindimensionaler Räume.

Folgerung: Für jede nicht-leere Menge lässt sich eine lineare Ordnung definieren. \square

Bemerkung: Anders als herkömmlich lassen sich jeweils unmittelbare Vorgänger und Nachfolger angeben. Anschaulich werden Perlen zu einer Kette aufgefädelt, wobei die Anzahl der Dimensionen unerheblich ist. Die lineare Ordnung einzelner Punkte kann für den \mathbb{R}^n mit $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ bspw. Dimension für Dimension geschehen: Die Gesamtlänge der Kette beträgt dann $\iota|\mathbb{R}|^n$. Eine andere lineare Ordnung ist die bei $0 \uparrow_n$ beginnende spiralförmige nach der euklidischen Norm der einzelnen Punkte.

Bemerkung: Nur böse Zungen behaupten, dass falsch sei, was an der Cantorschen Mengenlehre nicht trivialerweise richtig ist. Fest steht jedoch, dass letztere in weiten Teilen nicht aufrechterhalten werden kann, aber trotzdem noch genügend interessante Ideen enthält, die weiterverfolgt werden sollten. Eine nähere Wertung soll hierbei allerdings aus Gerechtigkeitsgründen unterbleiben.

3 Topologie

Im Folgenden wird die Mengenlehre mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ vorausgesetzt.

Definition: Gehört zu $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(X)$ neben \emptyset und $X \subseteq \mathcal{R}$ jeder Durchschnitt und jede Vereinigung von Mengen aus \mathcal{Y} , heißt ein Mengensystem \mathcal{Y} *Topologie* auf X . Das Paar (X, \mathcal{Y}) heißt *topologischer Raum*. Gilt $\mathcal{Y} = \mathcal{P}(X)$, heißt die Topologie *diskret*. Lässt sich jede Menge aus \mathcal{Y} als Vereinigung beliebig vieler Mengen aus $B \subseteq \mathcal{Y}$ schreiben, heißt die Menge B eine *Basis* von \mathcal{Y} . Jede irreflexive Relation $N \subseteq A^2$ etabliert eine *Nachbarschaftsrelation (NR)* in $A \subseteq X$ mit der Grundmenge X . Δ

Definition: Gilt $(a, b) \in N$, heißt a *Nachbar* von oder *benachbart* zu b . Speziell heißt ein Element $x \in A \subseteq X$ Nachbar von einem Element $y \in A$ mit $x \neq y$, wenn für alle $z \in X$ und eine Abbildung $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: (1) $d(x, y) \leq \max\{\min\{d(x, z), d(z, x)\}, \min\{d(y, z), d(z, y)\}\}$ und (2) $d(z, z) = 0$. Hierbei heißt d *Nachbarschaftsmetrik*. Die Menge aller Punkte $P = R \cup V$ sei eine *Zerlegung* in die *realen* Punkte R und die *virtuellen* Punkte V mit $R, V \neq \emptyset = R \cap V$. Ist R oder V klar, wird es jeweils weggelassen. Δ

Definition: Jede Menge $A \subseteq R$ etabliert ihr *Komplement* $A^c := R \setminus A$ in R . A^c heißt auch das *Äußere* von A . Alle Punkte von $V(A)$, die einen Nachbarn aus R ($A^c \cup V$) haben, bilden den (*inneren*) *Rand* ∂V (∂A) von $V(A)$. Hierbei hat c Vorrang vor ∂ . Bei sukzessiver weiterer Anwendung von ∂ wird das Argument jeweils als ohne Komplement angesehen. Das *Innere* von A sei $A^\circ := A \setminus \partial A$. Der Rand (der Breite $b \in \mathbb{R}_{>0}$) von A sei die Menge $\partial^b A := \{x \in A : d(x, y) \leq b, y \in A^c\}$ und heißt bei der Kreisscheibe *Kreisring*. Δ

Definition: Eine Menge $S \subseteq R(V)$ heißt *zusammenhängend*, wenn für jede Zerlegung von S in $Y \cup Z$ mit $Y, Z \neq \emptyset = Y \cap Z$ gilt: $\partial Y^c \cap \partial Z \neq \emptyset \neq \partial Z^c \cap \partial Y$. $S \subseteq R$ heißt darüber hinaus *einfach zusammenhängend*, wenn gilt: Sowohl $\partial Y^c \cap \partial Z \cup \partial Z^c \cap \partial Y$ für jede Zerlegung in zusammenhängende Y und Z als auch $S^c \cup (\partial)V$ mit S^c als Komplement von S in R ist mit zusammenhängendem $(\partial)V$ zusammenhängend. P und R seien einfach zusammenhängend. Jedes $U \subseteq R$ heißt *Umgebung* von $x \in R$, wenn $x \in U^\circ$ gilt. Δ

Definition: Gilt $\emptyset \neq \mathbb{D} \subseteq (X, \mathcal{Y})$, heißt ein zusammenhängendes \mathbb{D} *Gebiet*. Mit $m \in \mathbb{N}^*$ heißt die Menge h - $S \subseteq \mathbb{R}^m$ genau dann *n-dimensional* mit $m \geq n \in \mathbb{N}^*$, wenn sie mindestens einen n -Würfel mit Kantenlänge $h \in \mathbb{R}_{>0}$ und maximalem n enthält. Sei ${}^1\mathbb{R}^n$ die *Einheitskugel* mit dem Spezialfall *Einheitskreisscheibe* ${}^1\mathbb{R}^2$. *Mittelpunkte* a von n -Kugeln und n -Würfeln werden evtl. dahinter in Klammern als (a) notiert. Bestehen die Elemente einer Menge aus n maximalen Würfeln mit Kantenlänge ι , hat sie *Dimension* ιn . Δ

Beispiele: Für $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{A}_{\mathbb{R}}, \mathbb{A}_{\mathbb{C}}, \mathbb{R}$ und \mathbb{C} ist genau die jeweilige diskrete Topologie die Basis. Der Rand jeder n -Kugel mit $n \geq 2$ ist nur zusammenhängend, sie selbst hängt einfach zusammen. Für $n = 1$ sind beide unzusammenhängend. Mit $n \geq 2$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist der n -Torus ${}^r\mathbb{T}^n := (\partial^r \mathbb{R})^n$ nur zusammenhängend.

Satz: Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ lässt sich keine endliche Zerlegung einer n -Kugel zu einem n -Würfel zusammensetzen, da endlich viele konvexe Begrenzungen nicht konkave Pendants gleicher Größenordnung haben können. \square

Satz: Ein Durchlaufen von bis zu neun Feldern eines Tic-Tac-Toe-Spielfeldes macht die einelementige Menge zur einzigen zusammenhängenden mit Fixpunkteigenschaft (ungültiger Satz vom Igel). \square

Definition: Eine Funktion zwischen zwei topologischen Räumen heißt *stetig*, wenn für jeden abgebildeten Punkt gilt: für jede Umgebung des Bildpunktes dieses Punktes gibt es eine Umgebung des Punktes, deren Bild komplett in der Umgebung des Bildpunktes liegt. Δ

Bemerkung: Die suggestiven Begriffe *Kompaktheit* und (die eventuell irreführende) *Abzählbarkeit* werden nicht verwendet, da sie bei unendlichen Mengen wie \mathbb{R} bzw. \mathbb{N} nicht vorliegen. Bei allen kontrahierenden Deformationen sind Punkte so aus der Zielmenge zu entfernen wie es die Kontraktion vorgibt. Erst dann gilt die (verallgemeinerte) *Poincaré-Vermutung*.

Bemerkung: Es wird eine *exakte* Topologie vertreten, in der unterschiedliche infinitesimale Abstände eine infinitesimal-diskrete Struktur begründen, die Weyl- und höhere Symmetrien modellieren kann. Sie weicht von Standardtopologien insofern ab, als Hausdorffeigenschaft und Trennungsaxiome nicht gelten. Sie kann bspw. den Welle-Teilchen-Dualismus entschärfen, indem ein einheitliches Modell unter Zuhilfenahme nichtstandardanalytischer Methoden die Wirklichkeit abbildet.

4 Nichtstandardanalysis

Vorbemerkung: Im Folgenden gelten die Definitionen aus Mengenlehre sowie Topologie. Da das Abbildungskonzept verlangt, jedes außerhalb der Bildmenge abgebildete Element durch das jeweils nächste der Zielmenge zu ersetzen, sind die folgenden Aussagen maximal bis auf ι genau und damit nicht mehr eindeutig. Das Folgende lässt sich ebenfalls leicht auf andere Mengen und Normen verallgemeinern.

Von der Norm zum Differential

Definition: Sei $\emptyset \neq A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ und zumeist $m, n \in {}^\omega\mathbb{N}^*$. Die Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit \mathbb{V} Vektorraum über ${}^{(\omega)}\mathbb{K}$ heißt *Norm*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{V}$ und alle $\lambda \in {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ gilt: $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ (*Definitivheit*), $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (*Homogenität*) und $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Dreiecksungleichung*). Die *Dimension* $\text{Dim } \mathbb{V}$ gibt die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren wieder. Existieren $s, t \in [\tilde{\nu}, \nu]$ mit $s\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq t\|x\|_b$ für alle $x \in \mathbb{V}$, heißen die Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ *äquivalent*. Sei N die Menge aller Normen in \mathbb{V} . Δ

Satz: Normen sind genau dann äquivalent, wenn $\|x\|_a/\|x\|_b \in [\tilde{\nu}, \nu]$ für alle $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b \in N$ und alle $x \in \mathbb{V}^*$ gilt, da sich $s := \min\{\|x\|_a/\|x\|_b : x \in \mathbb{V}^*\}$ und $t := \max\{\|x\|_a/\|x\|_b : x \in \mathbb{V}^*\}$ setzen lässt. \square

Minimalitätssatz: Für jedes $r \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$ Nachkommastellen liefert die geometrische Reihe (**GR**) eine eindeutige b -adische Entwicklung und $\min\{b \in \mathbb{R}_{>1}\} = 2$, wobei $(1 - b^{-n})/(1 - b^{-1}) < 2$ gilt. \square

Bemerkung: Für $b \in]1, 2[$ geht die Eindeutigkeit verloren und es müssen zwei für die Dualdarstellung vorgesehene Ziffern (0 und 1) verwendet werden: Eine Ziffer ist nur für die Basis $b = 1$ sinnvoll.

Definition: Für die *charakteristische Funktion* χ gelte $\chi_A(a) := 1$ für $a \in A$ und $\chi_A(a) := 0$ für $a \notin A$. Sei $A_\infty := A \cup \{\pm\infty\}$ für $A \subseteq \mathbb{R}$ und $\infty \gg \iota^2$ als skalierbare Konstante. Weiter sei $\text{sgn}(z) := \tilde{z}|z|_{\mathbb{C}^*}$ für komplexe z und $\text{sgn}(x) := \tilde{x}|x|_{\mathbb{R}^*}$ für reelle x . Der Flächeninhalt von ${}^1\mathbb{R}^2$ ergibt die *Kreiszahl* π . Die Lösung von $x^\pi = -1$ sei die *Eulersche Zahl* ϵ (kurz gesprochen: „eps“). Dann etabliert $\epsilon^{\ln z} = z$ eine *Logarithmusfunktion* \ln und die *Potenzfunktion* $z^s = \epsilon^{s \ln z}$ mit $s, z \in \mathbb{C}$. Die *Exponentiation* lässt sich so (formal) festlegen. Δ

Bemerkung: Das Ersetzen von ± 0 durch $\pm\tilde{\infty}$ macht Berechnungen eindeutig und widerspruchsfrei. Die Definition von ϵ ist $O(\tilde{\nu})$ größer als die durch $(1 + \tilde{\nu})^\nu$ (Rechnen mit Näherungen!): Die exakt differenzierte Exponentialreihe mit möglichst vielen Gliedern rechtfertigt erstere.

Definition: Die Funktion $\mu_h : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ für eine m -dimensionale Menge $A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{C}^n$ mit $h \in \mathbb{R}_{>0}$ kleiner gleich dem Minimalabstand der Punkte in A , $m \in {}^\omega\mathbb{N}_{\leq \tilde{h}}$ und $\mu_h(A) := |A|h^m$ sowie $\mu_h(\emptyset) = |\emptyset| = 0$ heißt *exaktes h -Maß* von A und A *h -messbar*. Das *exakte Standardmaß* sei μ_ι (ggf. ohne Angabe von ι). Δ

Bemerkung: Da die Vereinigung A paarweise disjunkter h -homogener Mengen A_i mit $i \in I \subseteq \mathbb{N}$ offenbar additiv und eindeutig $\mu_h(A) = \bigoplus_{i \in I} \mu_h(A_i)$ ergibt, wird das Maßproblem neu positiv beantwortet. Die strenge Monotonie folgt für h -homogene Mengen $A_1, A_2 \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ mit $A_1 \subset A_2$ aus $\mu_h(A_1) < \mu_h(A_2)$. Ist h nicht bei allen betrachteten Mengen A_i gleich, so wird das Minimum von allen h gewählt und homogenisiert wie in der Mengenlehre beschrieben. Im Folgenden sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm.

Beispiele: Besteht $A \subset [0, 1]^m$ aus Punkten mit kleinstwertigem Bit 1 (0) in allen $n \in {}^\omega\mathbb{N}^*$ Koordinaten, so gilt $\mu_\iota(A) = \tilde{2}^n$. Da A eine unendliche und herkömmlich nicht abzählbare Vereinigung einzelner Punkte ist ohne Nachbarpunkte aus $[0, 1]^m$ in A und diese Punktmenge Lebesgue-Nullmengen darstellen, ist A nicht Lebesgue-messbar, wohl aber exakt messbar. Dichter zusammengesobene Gebiete aus ${}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ haben keine kleinere (größere) Durchschnittsmenge (Vereinigungsmenge) als zuvor.

Bemerkung: Das exakte h -Maß misst optimal, da es nur die **NR**en eines Punktes berücksichtigt, d. h. im Extremfall die Abstände der Punkte parallel zu den Koordinatenachsen. Begriffe wie σ -Algebra oder Nullmengen sind entbehrlich, da die leere Menge \emptyset als einzige Nullmenge ausreicht.

Definition: Die irreflexive symmetrische **NR** $B \subseteq A^2$ beschreibt benachbarte Punkte in A . Die Funktion $\gamma : C \rightarrow A \subseteq \mathbb{C}^n$ mit einem h -homogenen $C \subseteq \mathbb{R}$ und infinitesimalem h heißt *Weg*, wenn $\|\gamma(x) - \gamma(y)\|$ für benachbarte $x, y \in C$ infinitesimal ist und $(\gamma(x), \gamma(y)) \in B$ gilt. Sei $z_0 \in A \subseteq \mathbb{K}^n$ und $f : A \rightarrow {}^{(\nu)}\mathbb{K}^m$. **NR**en werden stets als (Vorgänger, Nachfolger) in der Form (z_0, \tilde{z}_0) oder (\tilde{z}_0, z_0) notiert, wobei \rightarrow „post“ und \leftarrow „prä“ gesprochen wird. Sind A und B klar, werden sie im Folgenden nicht erwähnt. Δ

Definition: Gilt für infinitesimales $\alpha \in {}^{(\omega)}\mathbb{R}_{>0}$ die Beziehung $\|f(\tilde{z}_0) - f(z_0)\| < \alpha$, heißt f α -nachfolgerstetig in z_0 in Richtung \tilde{z}_0 . Spielt der genaue Betrag von α keine Rolle, darf α weggelassen werden. Ist f für alle z_0 und \tilde{z}_0 α -nachfolgerstetig, so handelt es sich schlicht um α -Stetigkeit. Hierbei heißt α der Grad der Stetigkeit. Gilt die Ungleichung nur für $\alpha = \tilde{\nu}$, handelt es sich schlicht um (Nachfolger-)Stetigkeit. Δ

Beispiel: Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \{\pm 1\}$ mit $f(x) = \underline{1}^{\tilde{x}}$ ist in \mathbb{R} nirgends nachfolgerstetig, wohl aber ihr Betrag (vgl. Zahlentheorie). Hierbei ist \tilde{x} aufgrund der ι -Homogenität von \mathbb{R} ganzzahlig. Wird $f(x) = 1$ für endliche Brüche x gesetzt und $= -1$ andernfalls, so ist $f(x)$ in den unendlichen Brüchen x teilweise ι -nachfolgerstetig im Gegensatz zur herkömmlichen Auffassung.

Beispiel einer Peanokurve (vgl. [30], S. 188): Sei $g : {}^\omega\mathbb{R} \rightarrow {}^\omega\mathbb{R}$ gerade, periodisch mit der Periode 2 und in $I := [0, 1]$ gegeben durch $g(s) = \chi_{[1, \frac{3}{2}]}(\tilde{s}) + \chi_{[\frac{3}{2}, 3]}(\tilde{s})(3s - 1)$. Sei $\phi : I \rightarrow {}^\omega\mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\phi(s) = \left(\overset{\omega}{+}_{n=0} \tilde{2}^n g(4^n s), \overset{\omega}{+}_{n=0} \tilde{2}^n g(4^{n+1} s) \right).$$

Die Funktion ϕ ist mindestens stetig, da die Summen lokal letztlich lineare Funktionen in s sind. Dass sich so I bijektiv auf I^2 abbilden ließe, ist ein Irrtum: die Viererpotenzen in der Funktion g und die von g angenommenen Werte 0 und 1 in zwei Teilintervallen dünne I^2 so stark aus, dass eine Bijektion unmöglich ist. Den Beweis auf endliche Brüche zu beschränken, ist schlicht unzureichend.

Definition: Für $f : A \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{K}^m$ heißt $\downarrow f(\tilde{z}) := f(\tilde{z}) - f(z)$ *Nachfolger-Differential* von f in Richtung \tilde{z} in $z \in A$. Ist $\text{Dim } A = n$, so steht $\downarrow f(\tilde{z})$ für eine Nachfolgerableitung in jeder Variablen. Gemischte Differentiale werden durch mehrere Pfeile gekennzeichnet. Sind sie unwichtig, werden sie weggelassen. Gilt $f(z) = z$, lässt sich $\downarrow \tilde{z}$ statt $\downarrow f(\tilde{z})$ schreiben. Hierbei wird \downarrow „ab“ gesprochen. Gilt $|f(\tilde{x}) - f(x)| > \tilde{\omega}$ für ein x zu $f : A \subseteq {}^\omega\mathbb{R} \rightarrow {}^\omega\mathbb{R}$, so heißt x *Sprungstelle*. Sei im Folgenden $g(\tilde{x}) = \tilde{g}(x)$ gewählt. Δ

Definition: Ist der Betrag des Nachfolger-Differentials von f in Richtung \tilde{z} in $z \in A$ kleiner als α und infinitesimal, so ist f dort auch α -nachfolgerstetig. Eine Funktion $f : A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n \rightarrow {}^\omega\mathbb{R}$ heißt *konvex* (*konkav*) (in Zeichen $f \in \text{Con}(A)$), wenn ihr Graph unterhalb (oberhalb) oder auf jeder Verbindungsstrecke zweier seiner Punkte liegt. Kann „oder auf“ entfallen, gilt dies *streng*. Δ

Satz: Mit $A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ sind alle $f \in \text{Con}(A)$ α -nachfolgerstetig und nachfolgerdifferenzierbar. \square

Definition: Die m arithmetischen Mittel aller $f_k(\tilde{z})$ von $f(z)$ bilden die m gemittelten genormten *Tangentialnormalenvektoren* von m eindeutigen Hyperebenen. Diese liefern mn stetige Ableitungen für die Jacobi-Matrix eines nicht unbedingt stetigen f . Sie gehen jeweils durch $f_k(\tilde{z})$ und das nach 0 translatierte $f(z)$. Den Betrag ihrer Koeffizienten minimiert ein sehr einfaches lineares Programm (LP) (vgl. Lineare Optimierung). Δ

Definition: Für die (evtl. entfallende) *Laufvariable* $m \in \mathbb{N}_{\leq n}^*$ ergibt sich die *Nachfolgerableitung* in Richtung \tilde{z}_k von $F : A \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ in $z = \left(\overset{n}{\underset{(m=1)}{C}} z_m \right) := (z_1, \dots, z_n) \in A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ mit dem *Verkettungsoperator* \mathbb{C} als

$${}^1F_m(\tilde{z}) := \downarrow F(z) / \downarrow z_m = (F(z_1, \dots, \tilde{z}_m, \dots, z_n) - F(z)) / (\tilde{z}_m - z_m). \Delta$$

Definition: Die Ableitung einer Funktion $f : A \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{R}$ mit $A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{R}$ sei genau dann 0, wenn 0 im Intervall mit den Grenzen der links- und rechtsseitigen exakten Ableitung liegt oder wo f unstetig ist. Differenzierbarkeit ist also immer gegeben. Sei $\text{num}(x) = p \in \mathbb{Z}$ die *Zählerfunktion* und $\text{den}(x) = |q| \in \mathbb{N}^*$ die *Nennerfunktion* von $x = p/q \in \mathbb{R}$ mit teilerfremden p und q (in Zeichen: $p \perp q$).

Gilt mit den Bezeichnungen von oben für eine Funktion $f = \left(\overset{n}{\underset{1}{C}} f_m \right) : A \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ mit $z \in A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$

$$f(\tilde{z}) = \left(\frac{F(\tilde{z}_1, \overset{n}{\underset{2}{C}} z_m) - F(\overset{n}{\underset{1}{C}} z_m)}{\tilde{z}_1 - z_1}, \dots, \frac{F(\overset{n}{\underset{1}{C}} z_m, \tilde{z}_n) - F(\overset{n}{\underset{1}{C}} z_m)}{\tilde{z}_n - z_n} \right) = \left(\frac{\downarrow F_1(z)}{\downarrow z_1}, \dots, \frac{\downarrow F_n(z)}{\downarrow z_n} \right),$$

so heißt $f(\tilde{z}) = \nabla F(\tilde{z})$ mit dem *Nabla-Operator* ∇ die *exakte Nachfolger-Ableitung* ${}^1F(\tilde{z})$ bzw. der *exakte Nachfolger-Gradient* $\text{grad } F(\tilde{z})$ in Richtung \tilde{z} in A mit der dort *exakt differenzierbaren* Funktion $F(z)$.

Gilt dies für alle $z \in A$, so heißt F *exakt differenzierbare Stammfunktion* (SF) von f . Die Übereinstimmung der Ableitungen in allen Richtungen heißt *Holomorphie*. ($A = {}^v\mathbb{C}$ und $n = 1$ machen F herkömmlich holomorph). Auf einem Bereich ID sei $\mathcal{O}(\text{ID}) \subseteq \mathcal{C}(\text{ID}) \subseteq \mathbb{C}$ der *Ring holomorpher bzw. stetiger Funktionen*. Δ

Kettenregel: Aus $x \in A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{R}, g : A \rightarrow B \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{R}, f : B \rightarrow C \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{R}$ folgt ${}^1f(g(x)) = {}^1f(g(x)) {}^1g(x)$ wegen

$${}^1f(g(x)) = \frac{f(g(\bar{x})) - f(g(x))}{g(\bar{x}) - g(x)} \frac{g(\bar{x}) - g(x)}{\bar{x} - x} = \frac{f(\bar{g}(x)) - f(g(x))}{\bar{g}(x) - g(x)} {}^1g(x) = {}^1f(g(x)) {}^1g(x). \square$$

Produktregel: Addition und Subtraktion von $f(\bar{x})g(x)$ bzw. $f(x)g(\bar{x})$ im Zähler ergibt

$${}^1(fg)(x) = {}^1f(x)g(x) + f(\bar{x}) {}^1g(x) = {}^1f(x)g(\bar{x}) + f(x) {}^1g(x). \square$$

Quotientenregel: Das gleiche mit $f(x)g(x)$ bzw. $f(\bar{x})g(\bar{x})$ ergibt für Nenner $\neq 0$ der folgenden Quotienten

$${}^1\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{{}^1f(x)g(x) - f(x) {}^1g(x)}{g(x)g(\bar{x})} = \frac{{}^1f(x)g(\bar{x}) - f(\bar{x}) {}^1g(x)}{g(x)g(\bar{x})}. \square$$

Bemerkung: Hierbei müssen die Argumente und Funktionswerte einer kleineren Unendlichkeitsstufe als \bar{t} angehören sowie f und g in $x \in A$ hinreichend (α -)stetig sein. D. h. α muss klein genug sein, um \bar{x} durch x ersetzen zu können. Analoges gilt für infinitesimale Argumente. Die exakte Ableitung der Umkehrfunktion lautet ${}^1f^{-1}(y) = 1/{}^1f(x)$ aus $y = f(x)$ und der Identität $x = f^{-1}(f(x))$ mithilfe der Kettenregel bei gleicher Genauigkeit. Die Regel von de l'Hospital ist für (α -)stetige Funktionen f und g sinnvoll und ergibt sich für $f(v) = g(v) = 0$ mit $v \in A$ sowie $g(\bar{v}) \neq 0$ aus

$$f(\bar{v})/g(\bar{v}) = (f(\bar{v}) - f(v))/(g(\bar{v}) - g(v)) = {}^1f(v)/{}^1g(v).$$

Bemerkung: Lässt sich die exakte Ableitung durch ${}^1F(\bar{v}) := F(\bar{v}) - F(\bar{v})/(\bar{v} - \bar{v})$ ersetzen (Nenner $\neq 0$), hat dies den Vorteil ${}^1F(\bar{v})$ eher als „Tangentensteigung“ im Punkt v aufzufassen, z. B. wenn F α -stetig in v ist. Dies gilt vor allem, wenn $\bar{v} - v = v - \bar{v}$ ist und die zusammengefassten Ableitungen gleiches Vorzeichen haben. Die Übertragung ins (herkömmlich) Komplexe erfolgt analog.

Satz, der den von Froda verbessert: Eine monotone Funktion $f : [a, b] \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{R}$ hat maximal $2\omega^2 - 1$ Sprungstellen, da zwischen $-\omega$ und ω maximal $2\omega^2$ Sprünge von $\bar{\omega}$ möglich sind und die Funktion außer an den Sprungstellen wie eine Treppenfunktion ihre Werte halten kann. \square

Zwischenwertsatz: Sei $I := [\min f(x), \max f(x)]$. Ein in $[a, b]$ α -stetiges $f : [a, b] \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{R}$ nimmt jeden Wert in I mit einer Genauigkeit $< \alpha$ an. Ein in ${}^{(\omega)}\mathbb{R}$ stetiges f nimmt jeden Wert von ${}^v\mathbb{R}$ in I an.

Beweis: Mit jeweils $f(x)$ als Mittelpunkt existiert in I eine lückenlose Kette von sich überlappenden α -Umgebungen, da sonst ein Widerspruch zur α -Stetigkeit von f entstünde. Ferner unterschreitet eine Abweichung $|f(\bar{x}) - f(x)| < \bar{v}$ in ${}^v\mathbb{R}$ die herkömmlich maximal zugelassene Auflösung. \square

Bemerkung zum Satz vom Minimum und Maximum: Die stetige Funktion $f(x) := \hat{\omega} \sin(\omega x)$ nimmt für $x \in [-1, 1]$ die Minima $-\hat{\omega}$ und die Maxima $\hat{\omega}$ als unendliche Werte an.

Beispiel: Die \hat{t} -stetige Funktion $f : {}^{(\omega)}\mathbb{R} \rightarrow \{0, \iota\}$ mit $f(x) := \check{\iota}(1^{\hat{x}\hat{\iota}} + 1)$ besitzt nur die lokalen Minima 0 bzw. lokalen Maxima ι sowie die links- bzw. rechtsseitigen exakten Ableitungen ± 1 .

Beispiele: In ([4], S. 160) gilt $r_1 = r_2 = 3$. Mit $q = \text{den}(x)$ und $f(x) := -\chi_{\omega\mathbb{R}}(x) \underline{1}^{\hat{q}} \bar{q} \hat{q}$ hat $f : [0, 1] \rightarrow [\hat{\iota}, -\hat{\iota}]$ die beiden relativen Extrema $\pm \hat{\iota}$ (vgl. ebd. S. 24).

Definition: Die Richtung $w := \bar{z}$ ergibt die zweite Ableitung von $f : A \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ in $z \in A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ durch

$${}^2f(\bar{z}) := \frac{\underline{1}^2 f(\bar{z})}{(\underline{1}\bar{z})^2} = \frac{f(\bar{w}) - \hat{f}(\bar{z}) + f(z)}{(\underline{1}\bar{z})^2}. \Delta$$

Bemerkung: Höhere Ableitungen werden analog definiert. Jede Anzahl $m_n \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}$ für $n \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}^*$ der durchgeführten Ableitungen nach der n -ten Variable wird als Exponent hinter dieser notiert. Der im Zähler anzugebende Exponent ist die Summe aller m_n . Mit $1/(-1)! = 0$ gilt dann für g wie f und $p \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}^*$ die Leibnizsche Produktregel:

$${}^p(fg) = \text{+}_{m+n=p} \binom{p}{m} {}^m f {}^n g.$$

Beweis: Für $p = 1$ gilt die einfache Produktregel wie oben. Induktionsschritt von p nach \hat{p} :

$$\begin{aligned} \hat{p}(fg) &= \text{+}_{m+1+n=\hat{p}} \left(\binom{p}{m} + \binom{p}{m} \right) {}^m f {}^n g + \text{+}_{m+1+n=p} \binom{p}{m} {}^m f {}^n g - \text{+}_{m+1+n=\hat{p}} \binom{p}{m} {}^m f {}^n g \\ &= {}^p(1(fg)) = {}^p(1fg + f1g) = {}^p(1fg) + {}^p(f1g) = \text{+}_{m+n=\hat{p}} \binom{\hat{p}}{m} {}^m f {}^n g. \square \end{aligned}$$

Vom Integral zur Stirlingformel

Definition: Mit $z \in A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ heißt $\uparrow_{z \in A} f(z) \downarrow z := \uparrow_{z \in A} f(z) (\bar{z} - z)$ das *exakte Nachfolgerintegral* eines Vektorfeldes $f = (f_1, \dots, f_n) : A \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ in A und $f(z)$ *exakt integrierbar*. Das Entfernen mindestens eines Punktes aus A macht hier das exakte Integral *uneigentlich*. Es wird \uparrow „auf“ gesprochen. Für $\gamma : G = [a, b] \cap C \rightarrow A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n, C \subseteq \mathbb{R}$ und $f = (f_1, \dots, f_n) : A \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ heißt $\uparrow_{\gamma} f(\zeta) \downarrow \zeta = \uparrow_{s \in G} f(\gamma(s)) \downarrow \gamma(s)$ mit $\downarrow s > 0, \bar{s} \in]a, b] \cap C$ bei Wahl von $\bar{\gamma}(s) = \gamma(\bar{s})$ wegen $\zeta = \gamma(s)$ und $\downarrow \zeta = \gamma(\bar{s}) - \gamma(s) = \downarrow \gamma(s)$ (z. B. für $C = \mathbb{R}, B$ maximal in \mathbb{C}^2 und D maximal in \mathbb{R}^2) das *exakte Kurvenintegral (KI)* eines Vektorfeldes f längs des Weges γ . Uneigentliche exakte **KI**e ergeben sich analog den exakten Integralen, ohne das Entfernen von Intervallendpunkten von G zuzulassen. Δ

Bemerkung: Das (lineare) exakte **KI** erfordert kein stetiges f , existiert immer und stimmt mit dem herkömmlichen **KI** auf ${}^{(v)}\mathbb{K}$ weitgehend überein. Es ist im (herkömmlich) (unendlich) reellen Fall monoton.

Satz von Laisant: Für $c \in {}^{(\omega)}\mathbb{R}$ ergibt die Produktregel $\uparrow f(x) \downarrow x \Big|_{f^{-1}(y)} = \uparrow y \frac{\downarrow x}{\downarrow y} \downarrow y = y f^{-1}(y) - \uparrow f^{-1}(y) \downarrow y + c. \square$

Definition: Für alle $x \in V$ eines h -homogenen n -Volumens $V \subseteq [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{R}^n$ mit $B = B_1 \times \dots \times B_n, B_k \subseteq [a_k, b_k]^2$ und $|\downarrow x_k| = h$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\leq n}^*$ heißt mit $f(x) := 0$ für alle $x \in {}^{(\omega)}\mathbb{R}^n \setminus V$

$$\uparrow_{x \in V} f(x) \downarrow x := \uparrow_{x \in V} f(x) \downarrow (x_1, \dots, x_n) := \uparrow_{a_n}^{b_n} \dots \uparrow_{a_1}^{b_1} f(x) \downarrow x_1 \dots \downarrow x_n$$

das *exakte Volumenintegral* über eine dann *volumenintegrierbare* Funktion $f : {}^{(\omega)}\mathbb{R}^n \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{R}. \Delta$

Bemerkung: Die Isomorphie von \mathbb{C} und \mathbb{R}^2 liefert im Komplexen Entsprechendes und $\uparrow_{x \in V} 1 \downarrow x = \mu_h(V)$.

Beispiel: Mit dem exakten Volumenintegral im Gegensatz zum Lebesgue-Integral erfüllt

$$\|f\|_p := (\uparrow_{x \in V} \|f(x)\|^p \downarrow x)^{\bar{p}}$$

für beliebiges $f : {}^{(\omega)}\mathbb{R}^n \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{R}^m$ und $p \in [1, \omega]$ alle Eigenschaften einer Norm, auch die Definitheit.

Beispiel: Sei $[a, b] \cap h^\omega \mathbb{Z} \neq \emptyset$ eine h -homogene Teilmenge von $[a, b] \cap {}^{(\omega)}\mathbb{R}$ mit $B \subseteq [a, b[\cap h^\omega \mathbb{Z} \times]a, b] \cap h^\omega \mathbb{Z}$. Sei ferner T eine **SF** von einer in $[a, b[\cap h^\omega \mathbb{Z}$ nicht notwendig konvergenten Taylorreihe (**TR**) t und $f(x) := t(x) + \varepsilon \underline{1}^{\hat{x}/h}$ mit herkömmlich reellen x und $\varepsilon \geq \bar{v}$. Für $h = \bar{v}$ ist f weder stetig noch herkömmlich differenzierbar bzw. integrierbar in $[a, b[\cap h^\omega \mathbb{Z}$, aber es gilt exakt für alle h

$$\uparrow f(x) = \uparrow t(x) - \downarrow \varepsilon \underline{1}^{\hat{x}/h} \quad \text{und}$$

$$\uparrow_{x \in [a, b[\cap h^\omega \mathbb{Z}} f(x) \downarrow x = T(b) - T(a) + \varepsilon \left(\underline{1}^{\hat{b}/h} - \underline{1}^{\hat{a}/h} \right).$$

Beispiel: Die herkömmlich nicht messbare Mitteldrittel-Cantormenge $C_{\bar{3}}$ hat das Maß $\mu_t(C_{\bar{3}}) = \bar{3}^{-\omega}$. Sei die Funktion $c : [0, 1] \rightarrow \{0, \bar{3}^\omega\}$ definiert durch $c(x) = \bar{3}^\omega \chi_{C_{\bar{3}}}(x)$. Dann gilt

$$\uparrow_{x \in [0, 1]} c(x) \downarrow x = \uparrow_{x=0}^1 c(x) \downarrow x = \bar{3}^\omega \mu_t(C_{\bar{3}}) = 1.$$

Definition: Eine Folge (a_k) mit Folgengliedern a_k ist eine Abbildung von ${}^{(\omega)}\mathbb{Z}$ nach ${}^{(\omega)}\mathbb{C}^m : k \mapsto a_k$.

Eine Reihe ist eine Folge (s_k) mit $m \in {}^{(\omega)}\mathbb{Z}$, dem Konvergenzradius r und den Partialsummen $s_k = \uparrow_{j=m}^k a_j$.

Eine Folge (a_k) mit $k \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}^*, a_k \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ und $\alpha \in]0, \bar{v}]$ heißt α -konvergent gegen $a \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$, wenn es ein $m \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}_{\leq k}^*$ gibt, sodass $|a_k - a| < \alpha$ für alle a_k mit nicht zu kleinem $k - m$ gilt. Die Menge α -A aller solchen a heißt α -Grenzwertmenge von (a_k) , der aus ihr (z. B. als letzter oder Mittelwert) bestimmte eindeutige Repräsentant α -Grenzwert α -a. Für speziell $a = 0$ ergibt sich eine Nullfolge. Gilt die Ungleichung lediglich für $\alpha = \bar{v}$, so darf α - entfallen. Meistens wird k maximal und α minimal gewählt. Δ

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe impliziert $\uparrow_{n=1}^\omega (\bar{n} - \omega) = \varepsilon 2$.

Bemerkung: Herkömmliche Grenzwerte sind kaum genauer als $O(\bar{\omega})$. Ihre tatsächliche Rationalität oder reine Algebraizität wird selten beachtet! Um die Relevanz ausschließlich des größten Indexes zu vermeiden (vgl. [9], S. 144), wäre in der herkömmlichen Formulierung zu ergänzen, dass sich stets unendlich viele bzw. fast alle Folgenglieder mit beliebig kleinem Abstand zum Grenzwert und nur endlich viele mit größerem finden lassen. Erst dann gilt das Monotonieprinzip (vgl. [9], S. 155).

Bemerkung: Der Hauptsatz der Mengenlehre macht die Darstellung jeder positiven Zahl durch einen eindeutig bestimmten unendlichen Dezimalbruch haltlos (vgl. S. 27 f.). Wird $\varepsilon := \iota$ gesetzt, werden alle Beweise falsch, die für $\varepsilon \in {}^{(\omega)}\mathbb{R}_{>0}$ - speziell für alle $\varepsilon \in {}^{(\nu)}\mathbb{R}_{>0}$ - behaupten, dass eine reelle Zahl $\varepsilon\tilde{r}$ mit reellem $r \in {}^{(\omega)}\mathbb{R}_{>1}$ existiere. Andererseits kann ein infinitesimales Regress entstehen. Die $\varepsilon\delta$ -Definition des Grenzwertes (fragliche Existenz von δ , S. 235 f.) benötigt ε als ein gewisses Vielfaches von ι .

Bemerkung: Dies gilt auch für die $\varepsilon\delta$ -Definition der Stetigkeit (vgl. S. 215): Die jeden reellen Wert verdoppelnde reelle Funktion entbehrt gleichmäßiger Stetigkeit, da sich generell $\delta := \iota$ und ε entsprechend größer setzen lässt. Erfüllen zwei Funktionswerte die Bedingungen nicht, dann ist die Funktion dort auch nicht stetig. Also ist Stetigkeit bei Wahl des größten von allen gültigen infinitesimalen ε zur gleichmäßigen äquivalent. Die Äquivalenz zur Hölder-Stetigkeit ist ebenso leicht zu zeigen.

Bemerkung: Hier ist ggf. eine unendliche reelle Konstante zuzulassen. Dies gilt auch für gleichmäßige Konvergenz, da sich als alles erfüllender Index das Maximum der Indizes wählen lässt, der für jedes Argument gilt. Hier reicht stets ω aus, da sonst die punktweise Konvergenz fehlt. Also ist gleichmäßige Konvergenz bei Wahl des größten von allen gültigen infinitesimalen ε zur punktweisen äquivalent.

Satz von Fubini: Für $X, Y \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ mit $f : X \times Y \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ ergibt ein Umordnen der Integralsummen

$$\uparrow_Y \uparrow_X f(x, y) \downarrow x \downarrow y = \uparrow_{X \times Y} f(x, y) \downarrow (x, y) = \uparrow_X \uparrow_Y f(x, y) \downarrow y \downarrow x. \square$$

Beispiel: Mit $r_{\pm}^2 := x^2 \pm y^2$ ergibt sich gemäß dem Spätesteinsatzsprinzip (s. u.)

$$\uparrow_{[a, b] \times [c, d]} \tilde{r}_+^4 r_-^2 \downarrow (x, y) = \uparrow_a^b \tilde{r}_+^2 y \downarrow x \Big|_c^d = -\uparrow_c^d \tilde{r}_+^2 x \downarrow y \Big|_a^b = \arctan \frac{d}{b} - \arctan \frac{c}{b} + \arctan \frac{d}{a} - \arctan \frac{c}{a}$$

das ggf. uneigentliche Integral

$$I(a, b) := \uparrow_{[a, b]^2} \tilde{r}_+^4 r_-^2 \downarrow (x, y) = \arctan \frac{b}{b} - \arctan \frac{a}{b} + \arctan \frac{b}{a} - \arctan \frac{a}{a} = \tilde{\pi} - \tilde{\pi} = 0 \quad \text{und nicht}$$

$$I(0, 1) = \uparrow_0^1 \uparrow_0^1 \tilde{r}_+^4 r_-^2 \downarrow y \downarrow x = \uparrow_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4} = -\uparrow_0^1 \frac{1}{1+y^2} = \uparrow_0^1 \uparrow_0^1 \tilde{r}_+^4 r_-^2 \downarrow x \downarrow y = I(0, 1).$$

Vertauschungssatz: Vollständige (transfinite) Induktion erweist das Ergebnis mehrfacher Ableitungen einer Funktion $f : A \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ als unabhängig von der Reihenfolge, solange erst zum Schluss Variablen durch Werte ersetzt oder Grenzwerte gebildet werden, falls erforderlich (*Spätesteinsatzsprinzip*). \square

Beispiel: Für $f : {}^{\omega}\mathbb{R}^2 \rightarrow {}^{\omega}\mathbb{R}$, $f(0, 0) = 0$ und $f(x, y) = \tilde{r}_+^2 x y^3$ gilt mit $r_{\pm}^2 := x^2 \pm y^2$:

$$\frac{\downarrow^2 f}{\downarrow x \downarrow y} = \tilde{r}_+^6 (y^6 + 6x^2 y^4 - 3x^4 y^2) = \frac{\downarrow^2 f}{\downarrow y \downarrow x}$$

mit Wert $\tilde{2}$ an der Stelle $(0, 0)$, obwohl nachfolgend für $x = 0$ links y und für $y = 0$ rechts x steht in

$$\frac{\downarrow f}{\downarrow x} = -\tilde{r}_+^4 r_-^2 y^3 \neq \tilde{r}_+^4 (x y^4 + 3x^3 y^2) = \frac{\downarrow f}{\downarrow y},$$

d. h. dann ergibt links die Ableitung nach y den Wert $1 \neq 0$, welches die nach x rechts ist.

Erster Hauptsatz der exakten Differential- und Integralrechnung für **KIe**: Die Funktion $F(z) = \uparrow_{\gamma} f(\zeta) \downarrow \zeta$ ist mit $\gamma : [d, x] \cap C \rightarrow A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}$, $C \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{K}$, $d \in G = [a, b] \cap C$ bei Wahl von $\tilde{\gamma}(x) = \gamma(\tilde{x})$ exakt differenzierbar und es gilt $\downarrow F(z) = f(z)$ für alle $x \in G$ und $z = \gamma(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \downarrow F(z) &= \uparrow_{s \in [d, x] \cap C} f(\gamma(s)) \downarrow \gamma(s) - \uparrow_{s \in [d, x] \cap C} f(\gamma(s)) \downarrow \gamma(s) = \uparrow_x f(\gamma(s)) \frac{\gamma(\tilde{s}) - \gamma(s)}{\tilde{s} - s} \downarrow s \\ &= f(\gamma(x)) \downarrow \gamma(x) = f(\gamma(x)) (\tilde{\gamma}(x) - \gamma(x)) = f(z) \downarrow z. \square \end{aligned}$$

Zweiter Hauptsatz der exakten Differential- und Integralrechnung für **KIe**: Mit $\gamma : G \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ gilt wie oben vorausgesetzt

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \uparrow_{\gamma} \downarrow F(\zeta) \downarrow \zeta.$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) &= \uparrow_{s \in G} F(\tilde{\gamma}(s)) - F(\gamma(s)) = \uparrow_{s \in G} \downarrow F(\gamma(s)) (\tilde{\gamma}(s) - \gamma(s)) \\ &= \uparrow_{s \in G} \downarrow F(\gamma(s)) \downarrow \gamma(s) = \uparrow_{\gamma} \downarrow F(\zeta) \downarrow \zeta. \square \end{aligned}$$

Korollar: Ist γ darüber hinaus ein geschlossener Weg (**GW**) von f mit **SF** F , gilt $\uparrow_{\gamma} \downarrow f(\zeta) \downarrow \zeta = 0. \square$

Integralformel: Damit ist für $f : A \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ und den GW $\gamma([a, b]) \subseteq A \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ genau dann (s. u.) $f(z) \text{ ind}_\gamma(z) = \tilde{\pi} \uparrow_\gamma \zeta - z f(\zeta) \downarrow \zeta$, wenn aus $g(\zeta) = \zeta - z(f(\zeta) - f(z))$ folgt, dass $\uparrow_\gamma g(\zeta) \downarrow \zeta = 0$ gilt. \square

Bemerkung: Dies trifft insbesondere zu, falls g auf $\gamma([a, b])$ eine SF besitzt. Beide Hauptsätze gelten im herkömmlich reellen Fall analog. Für $u, v \in G, u \neq v$ und $\gamma(u) = \gamma(v)$ ist $\tilde{\gamma}(u) \neq \tilde{\gamma}(v)$ erlaubt.

Bemerkung: Im ersten Hauptsatz wird die Ableitung $\downarrow(F(z))/\downarrow z$ verschärft zum arithmetischen Mittel $\tilde{2}(f(z) + f(\tilde{z}))$ bzw. zu $f(\tilde{2}(z + \tilde{z}))$, im zweiten Hauptsatz $F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ zu $\tilde{2}(F(\gamma(b)) + F(\tilde{\gamma}(b))) - \tilde{2}(F(\gamma(a)) + F(\tilde{\gamma}(a)))$ bzw. zu $F(\tilde{2}(\gamma(b) + \tilde{\gamma}(b))) - F(\tilde{2}(\gamma(a) + \tilde{\gamma}(a)))$. Hierbei ergeben sich im hinreichend α -stetigen Fall von f bzw. von F am Rand nahezu die ursprünglichen Resultate.

Transformationssatz: Existiert die Jacobi-Matrix $D\varphi(x)$, lehrt die lineare Algebra für $f : \varphi(A) \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{R}^n$ und $A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{R}^n$ (vgl. [17], S. 519):

$$\uparrow_{\varphi(A)} f(y) \downarrow y = \uparrow_A f(\varphi(x)) \text{leig}(D\varphi(x)) \downarrow x. \square$$

Leibnizregel für Parameterintegrale: Für $f : {}^{(\omega)}\mathbb{K}^{\tilde{n}} \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{K}, a, e : {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{K}, \tilde{x} := (s, x_2, \dots, x_n)^\top$ und $s \in {}^{(\omega)}\mathbb{K} \setminus \{x_1\}$ gilt bei Wahl von $\tilde{a}(x) = a(\tilde{x})$ und $\tilde{e}(x) = e(\tilde{x})$

$$\frac{\downarrow}{\downarrow x_1} \left(\uparrow_{a(x)}^{e(x)} f(x, t) \downarrow t \right) = \uparrow_{a(x)}^{e(x)} \frac{\downarrow f(x, t)}{\downarrow x_1} \downarrow t + \frac{\downarrow e(x)}{\downarrow x_1} f(\tilde{x}, e(x)) - \frac{\downarrow a(x)}{\downarrow x_1} f(\tilde{x}, a(x)).$$

Beweis:
$$\begin{aligned} \frac{\downarrow}{\downarrow x_1} \left(\uparrow_{a(x)}^{e(x)} f(x, t) \downarrow t \right) &= \left(\uparrow_{a(\tilde{x})}^{e(\tilde{x})} f(\tilde{x}, t) \downarrow t - \uparrow_{a(x)}^{e(x)} f(x, t) \downarrow t \right) / \downarrow x_1 \\ &= \left(\uparrow_{a(x)}^{e(x)} (f(\tilde{x}, t) - f(x, t)) \downarrow t + \uparrow_{e(x)}^{e(\tilde{x})} f(\tilde{x}, t) \downarrow t - \uparrow_{a(x)}^{e(\tilde{x})} f(\tilde{x}, t) \downarrow t \right) / \downarrow x_1 \\ &= \uparrow_{a(x)}^{e(x)} \frac{\downarrow f(x, t)}{\downarrow x_1} \downarrow t + \frac{\downarrow e(x)}{\downarrow x_1} f(\tilde{x}, e(x)) - \frac{\downarrow a(x)}{\downarrow x_1} f(\tilde{x}, a(x)). \square \end{aligned}$$

Anmerkung: Die Integration im Komplexen erlaubt einen Weg mit Anfangs- und Endpunkt als Integralgrenzen. Ist $\tilde{a}(x) \neq a(\tilde{x})$, so wird der letzte Summand mit $(\tilde{a}(x) - a(x))/(a(\tilde{x}) - a(x))$ multipliziert. Ist $\tilde{e}(x) \neq e(\tilde{x})$, so wird der vorletzte Summand mit $(\tilde{e}(x) - e(x))/(e(\tilde{x}) - e(x))$ multipliziert. Für folgende Beispiele (vgl. [9], S. 540 - 543) sei jeweils $n \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}^*$ und $x \in [0, 1]$:

1. Die Folge $f_n(x) = \sin(nx)/n^2$ strebt für $n \rightarrow \omega$ nicht gegen $f(x) = 0$, sondern gegen $f(x) = \tilde{\omega}^2 \sin(\omega x)$ mit der (stetigen) Ableitung ${}^1 f(x) = \omega^2 \cos(\omega x)$ statt ${}^1 f(x) = 0$.
2. Die Folge $f_n(x) = x - \tilde{n}x^n$ strebt für $n \rightarrow \omega$ gegen $f(x) = x - \tilde{\omega}x^\omega$ statt $f(x) = x$ mit der (stetigen) Ableitung ${}^1 f(x) = 1 - x^\omega$ statt ${}^1 f(x) = 1$. Herkömmlich ist $f_n(x) = 1 - x^n$ unstetig in $x = 1$.
3. Die Folge $f_n(x) = nx(-x)^n$ strebt für $n \rightarrow \omega$ nicht gegen $f(x) = 0$, sondern gegen die stetige Funktion $f(x) = \omega x(-x)^\omega$ und nimmt für $x = \tilde{\omega}$ den Wert $\tilde{\epsilon}$ an.

Satz von Taylor: Es gilt für $\uparrow_m^m f(a) > \tilde{v}, {}^m f(a) \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}, g(z) = (z - a)^\omega, |z - a| < \tilde{\epsilon}\omega$ und $z \rightarrow a \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$

$$f(z) = T_\omega(z) := \uparrow_{m=0}^\omega \tilde{m}! {}^m f(a)(z - a)^m.$$

Beweis: Aus der Regel von de L'Hospital folgt dann mit der Leibnizschen Produktregel

$$f(z) = \frac{(fg)(z)}{g(z)} = \frac{{}^1(fg)(z)}{{}^1 g(z)} = \dots = \frac{\omega(fg)(z)}{\omega g(z)} = \frac{\omega(fg)(z)}{\omega g(z)} = \tilde{\omega}! {}^\omega(fg)(z) \quad \text{und}$$

$${}^\omega(fg)(z) = \uparrow_{m+n=\omega} \binom{\omega}{m} {}^m f(a) \omega^{-m} g(z) = \omega g(z) \uparrow_{m=0}^\omega \tilde{m}! {}^m f(a)(z - a)^m. \square$$

Folgerung: Der zweite Hauptsatz liefert für das Restglied $R_n(z) := f(z) - T_n(z) = f(a) + \uparrow_a^z {}^1 f(t) \downarrow t - T_n(z)$ nach dem Mittelwertsatz mit $\zeta \in {}^a \tilde{\mathbb{C}}(z)$ und $p \in \mathbb{N}_{\leq n}^*$

$$R_n(z) = \uparrow_a^z \tilde{n}!(z - t)^{\tilde{n}} f(t) \downarrow t = \tilde{p}n!(z - \zeta)^{\tilde{n}-p} {}^{\tilde{n}} f(\zeta)(z - a)^p.$$

Induktionsbeweis mit partieller Integration und Induktionsschritt von \tilde{n} nach n ($\tilde{n} = 0$ s. o.):

$$f(z) = T_{\tilde{n}}(z) + \tilde{n}!(z - a)^{\tilde{n}} f(a) + \uparrow_a^z \tilde{n}!(z - t)^{\tilde{n}} f(t) \downarrow t = T_n(z) + R_n(z). \square$$

Bemerkung: Es gilt $(e^t - 1)/t = 1 = {}^1 \exp(0)$ und damit $\downarrow_\epsilon y / \downarrow y = \tilde{y}$ aus $\downarrow y / \downarrow x = y := e^x$ sowie $\downarrow x^n = \downarrow e^{n \cdot x} = nx^{\tilde{n}} \downarrow x$ für $n \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}^*$ nach der Produkt- bzw. Kettenregel.

Bemerkung: In Einheitskreis und Dreiecken ist $\sin t/1 = (\cos t - 1)/t$ und $\cos t/1 = -\sin t/t$ zu ersehen. Damit gilt ${}^1\sin(0) = \cos(0)$ und ${}^1\cos(0) = -\sin(0)$ sowie mit $m \in {}^\omega\mathbb{N}$ und $n = \hat{k}$ der Satz von Moivre:

$$(\cos z + \underline{\sin} z)^m = \epsilon^{mz} = 1 + \overset{\omega}{+}_{k=1} \left(\hat{n}!(\underline{mz})^{\hat{n}} + \widetilde{n}!(\underline{mz})^n \right) = \cos(mz) + \underline{\sin}(mz). \square$$

Eulersche Sinusformel: Da die $\hat{\omega}$ Nullstellen der linken und rechten Seite wegen $\epsilon^{\pi n} = 1 + \sin 0$ übereinstimmen, liefern Nullstellensatz und Identitätssatz (vgl. [29], S. 41) für Reihen sowie der Satz oben $\Gamma(\hat{2}) = \pi^{\hat{2}}$ für die Gammafunktion $\Gamma(z) := \omega! \omega^z / \overset{\omega}{\times}_{k=0} (z+k)$ mit $z \in {}^v\mathbb{C} \setminus -{}^v\mathbb{N}$ entsprechend aus

$$\frac{\epsilon^{\hat{\pi}z} - 1}{\epsilon^{\hat{\pi}z} \hat{\pi}z} = \frac{\epsilon^{\hat{\pi}z} - \epsilon^{-\hat{\pi}z}}{\hat{\pi}z} = \frac{\sin(\hat{\pi}z)}{\hat{\pi}z} = \overset{\omega}{+}_{k=0} \frac{(\hat{\pi}z)^n}{\hat{n}!} = \overset{\omega}{\times}_{k=1} (1 - z^2/k^2) = \frac{\hat{z}}{\Gamma(z)\Gamma(-z)}. \square$$

Funktionalgleichung der Gammafunktion: Aus $\Gamma(\hat{z}) = z\Gamma(z)\omega/(\omega + \hat{z})$ und $\Gamma(1) := 1$ folgt für hinreichend kleine $|z|$ durch partielle Integration $\Gamma(\hat{z}) := \uparrow_0^\omega t^z \epsilon^{-t} \downarrow t = z\Gamma(z)$. Die Substitution $x := t^{\hat{2}}$ führt mit $z = \hat{2}$ zu der für die Statistik und Kugelberechnung wichtigen Gleichung $\uparrow_0^\omega \epsilon^{-x^2} \downarrow x = \hat{2}\pi^{\hat{2}}$. \square

Folgerungen: Das Wallis-Produkt ist $\overset{\omega}{\times}_{k=1} k^2/(k^2 - \hat{4}) = \hat{\pi}$. Eine logarithmische Ableitung (s. [22], S. 324) ergibt $\uparrow_0^\omega \check{x} \sin x \downarrow x = \hat{\pi}$. Für die gerade Funktion $\check{x} \cot \check{x} = \overset{\omega}{\pm}_{\hat{n}=0} \widetilde{n}! B_n x^n$ mit den Bernoulli-Zahlen B_n liefert die GR per Koeffizientenvergleich in $x^{-1}(\epsilon \sin(\pi x)) = \pi x \cot(\pi x) = 1 + 2x^2 \overset{\omega}{+}_{n=1} \widetilde{n}^2 - x^2$ (s. o.) $\zeta(n) = -\widetilde{n}! \hat{B}_n \hat{\pi}^n$ mit $\zeta(s) := \overset{\omega}{+}_{n=1} \hat{n}^s$ als Riemannscher Zetafunktion und $s \in ({}^\omega)\mathbb{C}$ sowie $\text{Re } s > 1$. \square

Stirlingformel: Für $a = 12\omega$ gilt die asymptotische Näherung $\hat{a} < \epsilon(\widetilde{\omega}^{\omega+\hat{2}} \hat{\pi}^{-\hat{2}} \omega!) + \omega < \tilde{a}$.

Beweis: Die Gammafunktion liefert $\binom{\omega}{\omega} = \frac{4^\omega}{(\pi\omega + \hat{\pi})^2} \sim \frac{4^\omega}{(\pi\omega)^2}$ und $\overset{\omega}{\times}_{n=\hat{\omega}} n = (b\omega)^\omega \sim \omega! 4^\omega (\pi\omega)^{-\hat{2}}$ mit $b \in]1, 2[$. Für $c, d \in]\hat{3}, 2[$ gilt daher

$$\omega! \sim c(\pi\omega)^{\hat{2}} (d\omega)^\omega.$$

Die Indizierung $c_\omega^2/c_{\hat{\omega}}$ von c ergibt $c = 2^{\hat{2}}$ und $d_\omega^\omega/d_{\hat{\omega}}$ von d zeigt $d = \hat{\epsilon}$ auf. Der Rest folgt aus [24]. \square

Folgerung: Vollständige Induktion ergibt $n! \in [\epsilon^{\hat{n}[\hat{\epsilon}, \hat{1}\hat{2}]} - \hat{n} \hat{\pi}^{\hat{2}} n^{n+\hat{2}}]$ für $n \in {}^\omega\mathbb{N}^*$ und $t = 12,004$. \square

Vom Satz von Green zu dem von Stokes

Satz von Green: Für die NRen $B \subseteq D^2$ mit h -Gebiet $\mathbb{D} \subseteq ({}^\omega)\mathbb{R}^2$, hinreichend großem $m \in \mathbb{N}^*$, infinitesimalem $h = |\downarrow x| = |\downarrow y| = |\check{\gamma}(s) - \gamma(s)| = \mathcal{O}(\hat{\omega}^m)$, $(x, y) \in \mathbb{D}, \mathbb{D}^- := \{(x, y) \in \mathbb{D} : (x+h, y+h) \in \mathbb{D}\}$, einem im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen GW $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial\mathbb{D}$ bei Wahl von $\check{\gamma}(s) = \gamma(\hat{s})$ gilt mit $s \in [a, b]$, $A \subseteq [a, b]^2$ und hinreichend a -stetigen Funktionen $u, v : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit ggf. nicht stetigen Ableitungen $\downarrow u/\downarrow x$, $\downarrow u/\downarrow y$, $\downarrow v/\downarrow x$ und $\downarrow v/\downarrow y$

$$\uparrow_\gamma (u \downarrow x + v \downarrow y) = \uparrow_{(x,y) \in \mathbb{D}^-} \left(\frac{\downarrow v}{\downarrow x} - \frac{\downarrow u}{\downarrow y} \right) \downarrow(x, y).$$

Beweis: Er wird nur für $\mathbb{D} := \{(x, y) : r \leq x \leq s, f(x) \leq y \leq g(x)\}$, $r, s \in ({}^\omega)\mathbb{R}$, $f, g : \partial\mathbb{D} \rightarrow ({}^\omega)\mathbb{R}$ geführt, da das jeweils um $\hat{\pi}$ gedrehte Äquivalent analog resultiert mit jedem h -Gebiet als Vereinigung solcher Mengen. Da sich die fehlende Beziehung analog ergibt, wird lediglich $\uparrow_\gamma u \downarrow x = -\uparrow_{(x,y) \in \mathbb{D}^-} \frac{\downarrow u}{\downarrow y} \downarrow(x, y)$ betrachtet. Unter Vernachlässigung der Teile von γ mit $\downarrow x = 0$ zum KI wie von $s := h(u(r, g(r)) - u(t, g(t)))$ gilt dann $-\uparrow_\gamma u \downarrow x - s = \uparrow_t^r u(x, g(x)) \downarrow x - \uparrow_t^r u(x, f(x)) \downarrow x = \uparrow_t^r \uparrow_{f(x)}^{g(x)} \frac{\downarrow u}{\downarrow y} \downarrow y \downarrow x = \uparrow_{(x,y) \in \mathbb{D}^-} \frac{\downarrow u}{\downarrow y} \downarrow(x, y)$. \square

Endlichkeitskriterium für Reihen: Seien $m, n, q, r \in \mathbb{N}$. Genau dann ist $S_r := \left| \overset{r}{+}_{q=0} s_q \right|$ mit $s_q \in ({}^\omega)\mathbb{C}$ endlich, wenn $0 \leq S_r = \left| \overset{n}{\pm}_{m=0} a_m \right| \leq a_0$ für eine Folge (a_m) mit $a_{\hat{m}} < a_m \in {}^v\mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt, sofern sich Summanden beliebig nach Größe und Vorzeichen sortieren, zusammenfassen bzw. in Summen aufspalten lassen. \square

Reihenproduktsatz: Mit $a_m, b_n \in ({}^\omega)\mathbb{K}$ ersetzt folgende Gleichung das Cauchy-Produkt (s. [29], S. 103):

$$\overset{\omega}{+}_{m=1} a_m \overset{\omega}{+}_{n=1} b_n = \overset{\omega}{+}_{m=1} \left(\overset{m}{+}_{n=1} (a_n b_{m-\hat{n}} + a_{\omega-\hat{n}} b_{\omega-m+n}) - a_m b_{\omega-\hat{m}} \right). \square$$

Faulhabersche Formel: Der vorige Satz zeigt für $\hat{p} \in \mathbb{N}^*$ und die Bernoulli-Zahlen B_m (vgl. [29], S. 163) mithilfe von Exponentialreihe (s. o.) und GR per Koeffizientenvergleich $\overset{n}{+}_{k=1} k^{\hat{p}} = \hat{p} \overset{\hat{p}}{+}_{m=0} \binom{\hat{p}}{m} B_m n^{\hat{p}-m}$. \square

Folgerung: $\overline{\mp}_{k=1}^n k^{\hat{p}} = 2 \overset{[\hat{n}]}{+}_{k=1} \hat{k}^{\hat{p}} - \overset{n}{+}_{k=1} k^{\hat{p}} = \hat{p} \overset{\hat{p}}{+}_{m=0} \binom{\hat{p}}{m} B_m (2^{\hat{p}} [\hat{n}]^{\hat{p}-m} - n^{\hat{p}-m})$. \square

Beispiel: Das folgende Reihenprodukt hat den endlichen Wert (vgl. [4], S. 61 f.):

$$\left(\pm_{m=1}^{\omega} \widetilde{m}^2\right)^2 = +_{m=1}^{\omega} \left(\left(\frac{\widetilde{m}}{\omega-\widetilde{m}}\right)^2 - \underline{1}^{\widetilde{m}} +_{n=1}^m \left(\left(\frac{\widetilde{n}}{m-\widetilde{n}}\right)^2 + \left(\frac{\omega-\widetilde{n}}{\omega-m+n}\right)^2 \right) \right) = 0,36590\dots \ll \frac{\zeta(2)^2}{3+8^2}.$$

Beispiel: Mit der Signumfunktion sgn gilt für folgendes Reihenprodukt (vgl. [4], S. 62):

$$+_{m=0}^{\omega} 2^{m \text{sgn}(m)} +_{n=0}^{\omega} \text{sgn}(n - \gamma) = \omega 2^{\omega} \gg -2.$$

Bemerkungen: Ist der Betrag von $x \in \mathbb{C}$ von anderer Größenordnung als der von $\downarrow x$ bzw. $\widetilde{\downarrow} x$, liefert

$$\begin{aligned} {}^0s(x) &:= \pm_{m=0}^n x^m = (1 - x^{-n})/\hat{x} && \text{durch Ableitung} \\ {}^1s(x) &= \mp_{m=1}^n m x^{m-1} = (n x^{-n} - n x^{-n-1})/\hat{x}^2. \end{aligned}$$

Obige Formeln wurden z. T. falsch berechnet. Letztere lässt sich für hinreichend kleine x und hinreichend, aber nicht zu große n noch zu $-\hat{x}^{-2}$ vereinfachen und bleibt auch für nicht zu große $x \geq 1$ gültig. Durch sukzessive Multiplikation von ${}^m s(x)$ mit x für $m \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ und anschließende Differentiation ergeben sich weitere Formeln für ${}^m s(x)$ als Beispiele auch divergenter Reihen. Wird hingegen ${}^0s(-x)$ von 0 bis 1 integriert und $n := \omega$ gesetzt, ergibt sich ein Integralausdruck für ${}_{\epsilon}\omega + \gamma$ mit der Eulerschen Konstante γ .

Die Regel von de l'Hospital löst den Fall $x = -1$. Über die binomische Reihe ergibt die Substitution $y := -x$ eine Reihe mit unendlichen Koeffizienten (die Reihendarstellung von ${}_{\epsilon}\omega$ sogar für γ). Wird der Zähler von ${}^0s(x)$ unzulässig zu 1 vereinfacht, können sich falsche Ergebnisse einstellen, insbesondere wenn $|x| \geq 1$ gilt. So ist ${}^0s(-\epsilon^{\pi})$ bspw. 0 für ungerades n und 1 für gerades n , aber nicht $\tilde{2}$.

Gegenläufigkeitssatz: Durchläuft der Weg $\gamma : G = [a, b] \cap C \rightarrow V$ mit $C \subseteq \mathbb{R}$ die Kanten aller n -Würfel mit Seitenlänge ι im n -Volumen $V \subseteq ({}^{\omega})\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ genau einmal, wobei in allen deren Seitenflächen paarweise gegenüberliegende Seiten in gegenläufiger Richtung, aber einheitlich traversiert werden, so gilt für $D \subseteq \mathbb{R}^2, B \subseteq V^2, f = (f_1, \dots, f_n) : V \rightarrow ({}^{\omega})\mathbb{R}^n, \gamma(s) = x, \gamma(\bar{s}) = \bar{x}$ und $V_r := \{\bar{x} \in V : x \in V, \bar{x} \neq \bar{x}\}$

$$\uparrow_{s \in G} f(\gamma(s)) \downarrow \gamma(s) \downarrow s = \uparrow_{\substack{(x, \bar{x}) \\ \in V \times V_r}} f(x) \downarrow x = \uparrow_{\substack{s \in G, \\ \gamma \uparrow \partial^n V}} f(\gamma(s)) \downarrow \gamma(s) \downarrow s.$$

Beweis: Bei Betrachten zweier beliebiger Quadrate mit gemeinsamer Kante der Länge ι , die in einer Ebene liegen, werden nur die Kanten von $V \times V_r$ nicht in beiden Richtungen bei gleichem Funktionswert durchlaufen. Sie liegen alle und damit der zu durchlaufende Weg genau in $\partial^n V$.

Satz: Genau dann, wenn $F : A \rightarrow ({}^{\omega})\mathbb{C}$ mit der Aufspaltung in Real- und Imaginärteil $F(z) := U(z) + \underline{V}(z) := f(x, y) := u(x, y) + \underline{v}(x, y)$, h -homogenem $A \subseteq ({}^{\omega})\mathbb{C}$ und $h = |\downarrow x| = |\downarrow y|$, der **NR** $B \subseteq A^2$, für alle $z = x + \underline{y} \in A$ holomorph ist, gelten die *Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungen* $\frac{\downarrow u}{\downarrow x} = \frac{\downarrow v}{\downarrow y}$ und $\frac{\downarrow v}{\downarrow x} = -\frac{\downarrow u}{\downarrow y}$.

Beweis: Aus $\frac{\downarrow u}{\downarrow x} + \frac{\downarrow v}{\downarrow x} = \frac{\downarrow v}{\downarrow y} - \frac{\downarrow u}{\downarrow y} = \frac{\downarrow F}{\downarrow z} = \downarrow U(z) + \downarrow \underline{V}(z)$ folgt direkt die Behauptung. \square

Bemerkung: Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Holomorphie von F ergibt sich

$${}^1F(\bar{z}) = \frac{\downarrow f}{\downarrow x} = \frac{\downarrow f}{\downarrow y} = \tilde{2} \left(\frac{\downarrow f}{\downarrow x} + \frac{\downarrow f}{\downarrow y} \right) = \frac{\downarrow F}{\downarrow z} = 0.$$

Integrallemma von Goursat: Für das im Dreieck $\Delta \subseteq ({}^{\omega})\mathbb{C}$ holomorphe f ohne **SF** gilt (vgl. [22], S. 149 ff.)

$$I := \uparrow_{\partial \Delta} f(\zeta) \downarrow \zeta = 0.$$

Widerlegung bestimmter herkömmlicher Beweise mit vollständiger Triangulierung: Für jedes minimale Teildreieck $\Delta_s \subseteq \Delta$ mit den Ecken κ, λ und μ von Δ_s muss o. B. d. A. entweder gelten

$$\begin{aligned} I_s &:= \uparrow_{\partial \Delta_s} f(\zeta) \downarrow \zeta = f(\kappa)(\lambda - \kappa) + f(\lambda)(\mu - \lambda) + f(\mu)(\kappa - \mu) = (f(\kappa) - f(\lambda))(\lambda - \mu) = 0 \quad \text{oder} \\ \uparrow_{\partial \Delta_s} f(\zeta) \downarrow \zeta &= f(\kappa)(\lambda - \kappa) + f(\lambda)(\mu - \lambda) + f(\mu)(\kappa - \mu) = (f(\kappa) - f(\lambda))\lambda + (f(\lambda) - f(\mu))\mu + (f(\mu) - f(\kappa))\kappa \\ &= {}^1f(\lambda) \left((\kappa - \lambda)\lambda - (\mu - \lambda)\mu + (\mu - \lambda)\kappa - (\kappa - \lambda)\kappa \right) = {}^1f(\lambda) \left((\mu - \lambda)(\kappa - \mu) - (\kappa - \lambda)^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Der Umlaufsinn von $\partial\Delta$ ist anscheinend unerheblich. Die Holomorphie bzw. zyklische Vertauschung erfordert $f(\kappa) = f(\lambda) = f(\mu)$. Insgesamt betrachtet muss f also im Widerspruch zur Voraussetzung konstant sein. Denn da der Term in der großen Klammer translationsinvariant ist, ließe sich sonst o. B. d. A. $\mu := 0$ setzen, und dieser Term wäre nur dann 0, wenn $\kappa = \lambda(1 \pm 3^{-2})$ mit $|\kappa| = |\lambda| = |\kappa - \lambda|$ gilt. Die Homogenität jeder horizontalen und vertikalen Gerade in ${}^{(\omega)}\mathbb{C}$ verbietet dies jedoch:

Das zugehörige Teildreieck wäre dann gleichseitig und nicht gleichschenkelig und rechtwinklig. Also ist $|I_s|$ in beiden Fällen mindestens $|^1 f(\lambda)\mathcal{O}(t^2)|$ o. B. d. A. für die Eckenwahl $0, \iota$ und $\underline{\iota}$. Ist L der Umfang eines Dreiecks, so gilt einerseits $|I| \leq 4^m |I_s|$ mit unendlich natürlichem m und andererseits $2^m = L(\partial\Delta)/|\mathcal{O}(t^2)|$ wegen $L(\partial\Delta) = 2^m L(\partial\Delta_s)$ und $L(\partial\Delta_s) = |\mathcal{O}(t^2)|$. Es gilt $|I| \leq |^1 f(\lambda)L(\partial\Delta)^2/\mathcal{O}(t^2)|$ und die gewünschte Abschätzung $|I| \leq |\mathcal{O}(\downarrow\zeta)|$ misslingt für $|^1 f(\lambda)L(\partial\Delta)^2|$ etwa größer als $|\mathcal{O}(t^2)|$. \square

Cauchyscher Integralsatz: Für die **NR**en $B \subseteq D^2$ und $A \subseteq [a, b]$ mit h -Gebiet $\mathbb{D} \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{C}$, infinitesimalem h sowie $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ und **GW** $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial\mathbb{D}$ bei Wahl von $\vec{\gamma}(s) = \gamma(\vec{s})$ mit $s \in [a, b]$, gilt $\uparrow_\gamma f(z) \downarrow z = 0$.

Beweis: Aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und des Satzes von Green gilt mit $x := \text{Re } z, y := \text{Im } z, u := \text{Re } f, v := \text{Im } f$ und $\mathbb{D}^- := \{z \in \mathbb{D} : z + h + \underline{h} \in \mathbb{D}\}$

$$\uparrow_\gamma f(z) \downarrow z = \uparrow_\gamma (u + \underline{v}) (\downarrow x + \downarrow y) = \uparrow_{z \in \mathbb{D}^-} \left(\left(\frac{\downarrow u}{\downarrow x} - \frac{\downarrow v}{\downarrow y} \right) - \left(\frac{\downarrow v}{\downarrow x} + \frac{\downarrow u}{\downarrow y} \right) \right) \downarrow (x, y) = 0. \square$$

Bemerkung: Mit $\tilde{\omega} := 0$ lässt sich der Hauptsatz der Cauchyschen Funktionentheorie nach Dixon (vgl. [22], S. 228 f.) beweisen, da der Limes dort 0 sein soll bzw. \tilde{r} gegen 0 für $r \in {}^{(\omega)}\mathbb{R}_{>0}$ gegen ω strebt. Der (verallgemeinerte) Satz von Liouville und der kleine Satz von Picard werden in ${}^{(\omega)}\hat{\mathbb{C}} \subset {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ durch die (ganzen) Funktionen $f(z) = \sum_{n=1}^{\omega} z^n \tilde{\omega}^{\tilde{n}}$ und $g(z) = \tilde{\omega}z$ wegen $|f(z)| < 1$ und $|g(z)| \leq 1$ widerlegt, der große Satz von Picard durch $f(\tilde{z})$ für $z \in {}^{(\omega)}\hat{\mathbb{C}}^*$.

Mittelwertgleichung: Die Integralformel liefert für $\gamma([0, \hat{\pi}]) = \partial^r \hat{\mathbb{C}}(c), c \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ und $r \in {}^{(\omega)}\mathbb{R}_{>0}$

$$f(c) = \tilde{\pi} \uparrow_0^{\hat{\pi}} f(c + r\epsilon^{\underline{p}}) \downarrow \varphi.$$

Bemerkung: Mit der Substitution $z = c + r\epsilon^{\underline{p}}$ folgt die Mittelwertgleichung $|f(c)| \leq |f|_y$ (s. [22], S. 160).

Beispiel: Mit $f(x) := \sum_{n=1}^{\omega} \tilde{n}^2 \epsilon(1 + n^2 x^2)$ gilt $^1 f(0) = \frac{f(\iota) - f(0)}{\iota - 0} = \sum_{n=1}^{\omega} \frac{\tilde{x}}{1 + n^2 x^2} \Big|_0 = \sum_{n=1}^{\omega} \tilde{n}^2 \epsilon(1 + n^2 \iota^2) = \iota\omega = 0$, wobei die Reihenentwicklung $\epsilon \tilde{x} = \sum_{n=1}^{\omega} \tilde{n} x^n$ mit $x \in]-1, 1[$ verwendet und gliedweise differenziert wurde.

Definition: Für einen **GW** $\gamma : [a, b] \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ und $z \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ heißt $\tilde{\pi} \uparrow_\gamma \zeta - z \downarrow \zeta$ *Umlaufzahl* bzw. *Index* $\text{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. Mit $A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{C}, n \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}, a_{jk}, c_j \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ und $f(z) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=-\omega}^{\omega} a_{jk} (z - c_j)^k$ sowie paarweise verschiedenen c_j heißen die Koeffizienten $a_{j,-1}$ der Funktion $f : A \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ *Residuen* $\text{res}_{c_j} f, \Delta$

Residuensatz: Aus γ und f wie oben ergibt sich $\tilde{\pi} \uparrow_\gamma f(\zeta) \downarrow \zeta = \sum_{j=0}^n \text{ind}_\gamma(c_j) \text{res}_{c_j} f$, da für alle $k \in {}^{(\omega)}\mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ einerseits $\sum_{j=0}^n | \uparrow_\gamma a_{jk} (\zeta - c_j)^k \downarrow \zeta | = 0$, andererseits $\tilde{\pi} \uparrow_\gamma a_{jk} \zeta - c_j \downarrow \zeta = \text{ind}_\gamma(c_j) \text{res}_{c_j} f$ für $k = -1$ gilt. \square

Definition: Ein Punkt $z_0 \in M \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{C}^n$ bzw. zu einer Folge (a_k) mit $k \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}$ heißt (*eigentlicher*) α -*Häufungspunkt* von M bzw. (a_k) , wenn in der Kugel ${}^{(\omega)}\hat{\mathbb{C}}(z_0) \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{C}^n$ um z_0 mit infinitesimalem α unendlich viele Punkte aus M bzw. paarweise verschiedene $a_k \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}^n$ liegen. Für $\alpha = \tilde{\omega}$ entfällt α, Δ

Bemerkung: Die paarweise verschiedenen Nullstellen $c_k \in \tilde{\omega}\hat{\mathbb{C}} \subset \mathbb{D}$ für $z \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ in $p(z) = \prod_{k=0}^{\omega} (z - c_k)$ seien so gewählt, dass $|f(c_k)| < \tilde{\omega}$ für eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ in einem Gebiet $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ gilt. \mathbb{D} enthalte $\tilde{\omega}\hat{\mathbb{C}}$ komplett, was eine Koordinatentransformation stets bewirkt, solange \mathbb{D} „groß“ genug ist. Die Koinzidenzmenge $\{\zeta \in \mathbb{D} : f(\zeta) = g(\zeta)\}$ von $g(z) := f(z) + p(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ enthält einen Häufungspunkt in 0. Da $p(z)$ jeden komplexen Wert annehmen kann, ist die Abweichung von f und g nicht vernachlässigbar.

Wegen $f \neq g$ widerspricht dies dem Identitätssatz wie die lokale Tatsache, dass in $z_0 \in \mathbb{D}$ alle Ableitungen ${}^n u(z_0) = {}^n v(z_0)$ zweier Funktionen u und v für alle n zwar übereinstimmen können: weiter entfernt können sich aber u und v deutlich unterscheiden, ohne ihre Holomorphie zu verlieren, da die Entwicklung mancher holomorphen Funktion in eine **TR** Näherungspotenzen enthält. Die Funktion $b(z) := \tilde{v}z$ mit $z \in {}^v\hat{\mathbb{C}} \subset {}^v\mathbb{C}$ bildet das einfach zusammenhängende ${}^v\hat{\mathbb{C}}$ holomorph auf ${}^1\hat{\mathbb{C}}$ ab.

Eine fehlende Injektivität bzw. Surjektivität erfordert eine Korrektur des Riemannschen Abbildungssatzes.

Beispiele für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ sind alle in $\hat{\mathbb{C}}$ beschränkten Funktionen mit $f(0) = 0$. Wird die obere Grenze von ω auf $|\mathbb{N}^*$ erweitert, ergeben sich ganze Funktionen mit unendlich vielen Nullstellen. Die Nullstellenmenge braucht nicht diskret zu sein. Damit kann die Menge aller $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ Nullteiler enthalten. Die Funktionen widerlegen erneut den kleinen Satz von Picard, da sie mindestens \hat{n} Werte in \mathbb{C} auslassen.

Satz (binomische Reihe): Für alle $m \geq \nu$ und $\binom{\alpha}{0} := 1, \alpha \in {}^{(\nu)}\mathbb{C}, \binom{\alpha}{n} := \tilde{n}! \alpha \dots (\alpha - n)$ und $|\binom{\alpha}{n} / \binom{\alpha}{m}| < 1$ folgt über $z \in {}^{1-\hat{\nu}}\hat{\mathbb{C}}$ (bzw. $z \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ für $\alpha \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}$ und die TR um 0) die Gleichung $\hat{z}^\alpha = \hat{+}_{n=0}^\omega \binom{\alpha}{n} z^n$. \square

Multinomialsatz: Für $\zeta \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}, z \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}^k, k \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}_{\geq 2}, m, n_j \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}^*, |n| := \hat{+}_{j=1}^k n_j, z^n := \hat{\times}_{j=1}^k z_j^{n_j}$ und $\binom{m}{n} := n_1! \dots n_k! m!$ gilt

$$(1\hat{1}_k^\top z)^m = \hat{+}_{|n|=m} \binom{m}{n} z^n.$$

Beweis: Die Fälle $k \in \{1, 2\}$ sind klar. Induktionsschritt von k nach \hat{k} mit $\binom{m}{n} = \binom{m}{n_1, \dots, n_k, p} \binom{p}{n_k, n_k}$ und $p = n_k + n_k$:

$$(1\hat{1}_k^\top z)^m \Big|_{\zeta_k = z_k + z_k} = \hat{+}_{|n|=m} \binom{m}{n} z^n \Big|_{n_k! = n_k! n_k!} = \hat{+}_{|n|=m} \binom{m}{n} z^n \quad \text{bzw. von } m \text{ nach } \hat{m}$$

$$(1\hat{1}_k^\top z)^{\hat{m}} = \hat{m} \hat{+}_0^{\hat{z}_j} (1\hat{1}_k^\top z)^m \Big|_{z_j = \zeta} \downarrow \zeta + (1\hat{1}_k^\top z)^{\hat{m}} \Big|_{z_j=0} = \hat{m} \hat{+}_0^{\hat{z}_j} \hat{+}_{|n|=m} \binom{m}{n} z^n \Big|_{z_j = \zeta} \downarrow \zeta + (1\hat{1}_k^\top z)^{\hat{m}} \Big|_{z_j=0} = \hat{+}_{|\hat{n}|=\hat{m}} \binom{\hat{m}}{\hat{n}} z^{\hat{n}}. \square$$

Allgemeine Leibnizsche Produktregel: Mit $\downarrow^n := \downarrow_1^{n_1} \dots \downarrow_k^{n_k}$ und $\downarrow_j^{n_j} := \downarrow^{n_j} / \downarrow z_j^{n_j}$ folgt für $j, k, m, n \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}$ und differenzierbares $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_k \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ aus dem Multinomialsatz $\downarrow^m f = \hat{+}_{|n|=m} \binom{m}{n} \downarrow^n f$. \square

Satz von Taylor für mehrere Variablen: Mit $n! := \hat{\times}_{j=1}^k n_j!, a, z \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}^k$ und $(z - a)^n := \hat{\times}_{j=1}^k (z - a)^{n_j}$ folgt aus dem Multinomialsatz ebenfalls analog zum Beweis der einfachen TR für $n \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}$

$$f(z) = T_\omega(z) := \hat{+}_{|n|=0}^\omega \tilde{n}! \downarrow^n f(a) (z - a)^n. \square$$

Folgerung: Analog zur einfachen TR ist das Restglied mit $\zeta \in {}^a\hat{\mathbb{C}}(z)$ und $k \in \mathbb{N}_{\leq \hat{n}}^*$

$$R_n(z) = (z - \zeta)^k / (1 - k/\hat{n}) \hat{+}_{|m|=\hat{n}} \tilde{m}! \downarrow^m f(\zeta) (z - a)^{m-k}. \square$$

Kettenregel für mehrere Variablen: Für $z \in A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^k, g : A \rightarrow B \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^m, f : B \rightarrow C \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ gilt mit $k, m, n \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}^*$:

$${}^1 f(g(z)) = {}^1 f(g(z)) \downarrow g(z).$$

Beweis: Aus dem Satz von Taylor für mehrere Variablen folgt für beschränkte $\|r(z)\|$ und $\|s(g(z))\|$

$$g(\vec{z}) = g(z) + {}^1 g(z) \downarrow z + r(z) \|\downarrow z\|^2 \quad \text{und} \quad f(\vec{g}(z)) = f(g(z)) + {}^1 f(g(z)) \downarrow g(z) + s(g(z)) \|\downarrow g(z)\|^2. \square$$

Newtonverfahren: Wird oben $f(\vec{z}) = f(z) + {}^1 f(z) \downarrow z = 0$ gefordert, so gilt $z_{\hat{n}} := z_n - {}^1 f(z_n)^{-1} f(z_n)$, falls ${}^1 f(z_n)^{-1}$ invertierbar ist, mit quadratischer Konvergenz in der Nähe einer Nullstelle. \square

Satz von Stokes (vgl. [17], S. 625 f.): Steht – für hinreichend α -stetige Funktionen $f_m : C \rightarrow {}^{(\omega)}\mathbb{R}$ über einem wegzulassenden Term bei einer alternierenden Differentialform $v := \hat{+}_{m=1}^n f_m \downarrow x_1 \wedge \dots \wedge \overline{\downarrow x_m} \wedge \dots \wedge \downarrow x_n$ vom Grad \hat{n} auf einem achsenparallelen Quader $C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{R}^n$ mit $\partial C := \hat{\mp}_{m=1}^n (F_{a,m} - F_{b,m})$ und $F_{a,m} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m] \times \dots \times [a_n, b_n]$ sowie $F_{b,m} = [a_1, b_1] \times \dots \times [b_m] \times \dots \times [a_n, b_n]$, so gilt $\hat{+}_C \downarrow v = \hat{+}_{\partial C} v$. \square

Beweis: Der zweite Hauptsatz und der Satz von Fubini (s. o.) ergeben für die Seitenflächen

$$\hat{+}_C \downarrow v = \hat{\mp}_{m=1}^n \hat{+}_{a_m}^{b_m} \dots \overline{\hat{+}_{a_m}^{b_m}} \dots \hat{+}_{a_1}^{b_1} (f_m(x_1, \dots, a_m, \dots, x_n) - f_m(x_1, \dots, b_m, \dots, x_n)) \downarrow x_1 \wedge \dots \wedge \overline{\downarrow x_m} \wedge \dots \wedge \downarrow x_n$$

und

$$\overline{\downarrow_{x_m}^{f_m}} \downarrow x_m \wedge \downarrow x_1 \wedge \dots \wedge \downarrow x_{\hat{m}} \wedge \downarrow x_{\hat{m}} \wedge \dots \wedge \downarrow x_n = -\hat{1} \overline{\downarrow_{x_m}^{f_m}} \downarrow x_1 \wedge \dots \wedge \downarrow x_n. \square$$

Bemerkung: Der Satz von Stokes gilt auch für aus Quadern bestehende n -dimensionale Mannigfaltigkeiten.

Beispiele: Für $n \in \mathbb{N}^*$ bestehen $[-1, 1]^n$ und ${}^1 \mathbb{R}^n$ aus $\hat{\tau}^{-n}$ bzw. $\hat{\tau}^n \pi^{\hat{n}} / \Gamma(\hat{n} + 1)$ Punkten (vgl. [30], S. 254).

5 Zahlentheorie

Das Folgende setzt Mengenlehre, Topologie und Nichtstandardanalysis voraus. Sei $k \in \mathbb{N}$.

Primzahlsatz: Für $\pi(x) := |\{p \in \mathbb{P}_{\leq x} : x \in {}^\omega\mathbb{R}\}|$ gilt $\pi(\omega) = \widetilde{\epsilon}\omega + \mathcal{O}(\epsilon\omega \omega^2)$.

Beweis: Intervalle fester Länge $y \in {}^\omega\mathbb{R}_{>0}$ erlauben \check{y} Mengen-2-Tupel von Primzahlen so zu bilden, dass das erste Intervall eine unveränderte repräsentative Primzahldichte hat und das zweite Intervall leer ist, dann auf ein Intervall mit den zweitmeisten eines mit den zweitwenigsten Primzahlen folgt usw. Die Stirlingformel (s. Nichtstandardanalysis) legt die Primzahllücke $n = \epsilon^\sigma = \mathcal{O}(\epsilon(n!))$ mit $n \in {}^\omega\mathbb{N}_{\geq 2}$ nahe.

Impliziert der Induktionsanfang $n = 2$ bzw. 3 die Annahme, dass mit $x_4 \in [2, 4]$ das erste Intervall $x_n/\epsilon x_n$ Primzahlen enthält, so beweist der Schritt von x_n nach x_n^2 , dass $\pi(x_n^2) = \pi(x_n)\check{x}_n$ Primzahlen nur aus $\pi(x_n) = x_n/\epsilon x_n$ folgen. Die Primzahllücke beträgt durchschnittlich ϵx_n , aber maximal ϵx_n^2 , und die maximale Entsprechung von x_n^2 zu x_n ist ω zu ω^2 . \square

Bemerkung: Ersetzt $m \in {}^\omega\mathbb{N}_{>2}$ bei $\widetilde{m}y^{\check{m}}$ Mengen- m -Tupeln die 2 , bleibt das Ergebnis gleich. Vollständige Induktion und das Sieb des Eratosthenes zeigen mit dem dirichletschen Primzahlsatz je unendlich viele prime und zusammengesetzte Mersenne-Zahlen $M_n := 2^n - 1$ für $n \in {}^\omega\mathbb{N}^*$ auf (s. [25], S. 174 f. und 354 – 365).

Satz von Singmaster: Es gibt maximal 8 verschiedene Binomialkoeffizienten gleichen Werts > 1 .

Beweis: Die Existenz ist klar wegen $\binom{3003}{1} = \binom{78}{2} = \binom{15}{5} = \binom{14}{6}$ und dem Aufbau des Pascalschen Dreiecks. Mit $p \in {}^\omega\mathbb{P}, a, b, c, d \in {}^\omega\mathbb{N}^*, \hat{a} \leq r := p - b, \hat{a} < \hat{c} \leq n := p - d, b < d$ und $s \notin \mathbb{P}$ für alle $s \in [\max(r - \hat{a}, \hat{n}), r]$ ergeben die Stirlingformel $n!^2 \sim \pi(\hat{n} + \check{3})(\check{\epsilon}n)^{\hat{n}}$ und der Primzahlsatz $\omega\binom{r}{a} \leq \epsilon\omega\binom{n}{c}$ für $p \rightarrow \omega$. \square

Satz von Giuga: Genau dann ist $n \in {}^\omega\mathbb{N}_{\geq 2}$ eine Primzahl, wenn $\prod_{k=1}^{\hat{n}} k^{\check{n}} \equiv -1 \pmod{n}$ gilt.

Beweis: Der (kleine) fermatsche Satz erledigt den Fall $n \in {}^\omega\mathbb{P} \cup {}^\omega 2\mathbb{N}^*$. Aus dem harmonischen und geometrischen Mittel H_n bzw. G_n folgt andernfalls $\prod_{p \in {}^\omega\mathbb{P}} \check{p} - \prod_{p \in {}^\omega\mathbb{P}} \check{p} = m/H_n - G_n^{-m} = c \in {}^\omega\mathbb{N}^*$ (vgl. [1], S. 3 f.). Dies widerspricht $c < 1$ aufgrund von $H_n(m) \neq H_n = H_n(m, n) = m/(c + \check{n}) < n^{\check{m}} = G_n$. \square

Primzahllückensatz: Für die Menge M_g der mittelbaren Primzahllücken gilt $M_g \supset {}^\omega 2\mathbb{N} \cup \{1\}$.

Beweis durch vollständige Induktion: Behauptung ist, dass neben 1 die mittelbaren Primzahllücken m_p von 2 bis \check{p} existieren. Sie stimmt für die Primzahlen $p \in \{2, 3\}$. Der Primzahlsatz lässt beim Schritt von $p \rightarrow p + 2$ keine größere als die aufgetretenen Primzahllücken als m_{p+2} zu. Daher existiert auch \check{p} . \square

Satz von Goldbach: Jede gerade Zahl > 2 ist Summe zweier Primzahlen.

Beweis: Mit $\hat{m} + \hat{n} = p_{m+r, n-r} + q_{m+r, n-r} + r, r \in \{0, 2, \dots, \max(g(n))\}$ gilt zugleich $\hat{m} + \hat{n} = p_{m+s, n-s} + q_{m+s, n-s} + s, s \in \{0, 2, \dots, \max(g(n)) + 2\}$. Daraus folgt $\hat{m} + \hat{n} + 2 = p_{\hat{m}+r, \hat{n}-r} + q_{\hat{m}+r, \hat{n}-r} + r, r \in \{0, 2, \dots, \max(g(\hat{n}))\}$. Vollständige Induktion liefert dann die Behauptung mit dem vorigen Satz. \square

Satz zur zweiten Hardy-Littlewood-Vermutung: Für $m, n \in {}^\omega\mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt $\pi(m + n) \leq \pi(m) + \pi(n)$.

Vollständiger Induktionsbeweis nach n : Die Fälle $\pi(m + \hat{n}) = \pi(m + n)$ bzw. $\pi(\hat{n}) = \check{\pi}(n)$ und $\pi(m + \hat{n}) = \check{\pi}(m + n)$ sind klar. Liegt der letzte Fall mit $\pi(\hat{n}) = \pi(n)$ vor, folgt die Behauptung mit $m := n + k$ und $\pi(n) = \widetilde{\sigma}n + \mathcal{O}(\sigma n^2)$ wegen $\check{\pi}(\hat{n} + k) \leq \pi(n + k) + \pi(n)$ und $\pi(4) \leq \hat{\pi}(2)$ usw. aus

$$(n + k)(\epsilon(\hat{n} + k) - \epsilon(n + k))\sigma + n(\epsilon(\hat{n} + k) - \sigma)\epsilon(n + k) \geq \epsilon(\hat{n} + k)\epsilon(n + k)\sigma. \square$$

Koeffizientensatz für ω -AZen: Keine Nullstelle normierter irreduzibler Polynome und Reihen mit mindestens einem $a_k \notin {}^\omega\mathbb{Z}$ ist ω -AZ, da diese paarweise verschieden und eindeutig bestimmt sind. \square

Schrankensatz für ω -AZen: Kein $z \in \mathbb{C}^*$ mit $|z| \notin [\widetilde{\omega}, \omega]$ ist ω -AZ.

Beweis: Den reellen Fall lösen in einer Polynom- oder Reihengleichung der Ansatz $a_m = 1$ und $a_k = -\omega$ für $k < m$ mit Bilden des Kehrwerts und die GR. Das Ersetzen von ω jeweils durch $\omega(m) = \omega - \omega/\omega(m)^m$ liefert die exakten Grenzwerte. Den komplexen Fall löst u. a. $x = \check{y}\omega$ mit $y \in {}^\omega\mathbb{R}^*$. \square

Folgerungen: Für jedes $z \in \mathbb{R} + \mathbb{I}$ mit $|z| \notin \mathbb{B}$ und $\eta := z^{\hat{\omega}}$ ist die GR $\dagger_{n=0}^{\omega} z^n = \hat{\eta}/\hat{z} \notin {}^{\omega}\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$. Mit $k = \omega^2!$ gilt $\Gamma(z) := k!k^z/(z\hat{z}\dots(z+k)) \notin {}^{\omega}\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ für alle $z \in {}^{\omega}\mathbb{R} \setminus -{}^{\omega}\mathbb{N}$. Für die Eulersche Zahl gilt $\epsilon = (1 + \hat{\omega})^{\omega} = (k\omega + 1)/\omega! \notin {}^{\omega}\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ mit $k > \omega$ (Exponentialreihe).□

Anzahlsatz der AZen: Mit der Riemannschen Zetafunktion ζ und der durchschnittlichen Anzahl $z(m)$ der Nullstellen eines \hat{m} -Polynoms oder einer \hat{m} -Reihe haben die AZen asymptotisch für $\hat{\kappa} = n$ die Anzahl

$$\mathbb{A}(m, n) = \zeta(\hat{m})z(m)\hat{\kappa}^m(n + O(\sigma)).$$

Beweis: Der Fall $m = 1$ hat nach ([25], S. 323) den Korrekturterm $O(\sigma n)$ und gibt die Anzahl $4\dagger_{k=1}^n \varphi(k) - 1$ der Brüche über die eulersche φ -Funktion wieder. Für $m > 1$ ändern die Teilbarkeitsverhältnisse weder den Korrekturterm $O(\sigma)$ noch den Hauptterm. Durch $1/\zeta(\hat{m}) = \prod_{i=1}^n (1 - \hat{p}_i^{\hat{m}})$ (GRn!), das Vielfache primer \hat{p}_i entfernt, werden Polynome und Reihen mit $\text{ggT}(a_0, a_1, \dots, a_m) \neq 1$ ausgeschlossen.□

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes nicht-konstante Polynom $p \in ({}^{\omega}\mathbb{C})$ hat ein $z \in ({}^{\omega}\mathbb{C})$ mit $p(z) = 0$.

Indirekter Beweis: Eine affin-lineare Variablensubstitution erreicht $\widetilde{p}(0) \neq O(\iota)$. Dann ist $f(z) := \widetilde{p}(z)$ für alle $z \in ({}^{\omega}\mathbb{C})$ holomorph unter der Annahme $p(z) \neq 0$. Mit $f(\hat{i}) = O(\iota)$ liefert die Mittelwertungleichung (s. Nichtstandardanalysis) $|f(0)| \leq |f|_{\gamma}$ für $\gamma = \partial^r \mathbb{C}$ und beliebiges $r \in ({}^{\omega}\mathbb{R}_{>0})$, also $f(0) = O(\iota)$.□

Beispiele: Für $m = 1$ gibt es $3(n/\hat{\kappa})^2 + O(\sigma n)$ reelle und für $m = 2$, da ein reelles Polynom vom Grad 2 nach der $a-b-c$ -Formel zwei reelle Nullstellen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{16}$ hat, $9\hat{\kappa}^3/\zeta(3) + O(\sigma n^2)$ reelle Lösungen. Für $a_m = 1$ existieren $z(m)\hat{\kappa}^{\hat{m}}(\hat{\kappa} + O(\sigma))$ ganzzalgebraische Lösungen.

Bemerkung: Im reellen Fall ist $z(m)$ asymptotisch gleich $\epsilon m/\hat{\kappa} + O(1)$ nach [14].

Folgerung: Für $m = n = \hat{\nu}$ gilt $|{}^{\nu}\mathbb{A}_{\mathbb{R}}| = \hat{\pi}\sigma\hat{\kappa}^{\hat{\nu}}(\hat{\nu} + O(\sigma))$ und $|{}^{\nu}\mathbb{A}_{\mathbb{C}}| = \hat{\kappa}^{\hat{\nu}}(\hat{\nu} + O(\sigma))$.□

Satz von Bunjakowski: Gilt $a_n > 0$ für ein Minimalpolynom $p \in ({}^{\omega}\mathbb{C})$ vom Grad n mit $p(i) \perp p(j)$ für alle ${}^{\omega}\mathbb{N}^* \ni i < j \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$, so hat es unendlich viele Primzahlen als Werte.

Beweis: Der dirichletsche Primzahlsatz liefert für $m \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ unendliche viele Primzahlen $q_m = bm + c$ mit festen $b \perp c \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$. Umgekehrt gibt es unendlich viele m , sodass $d_m := p(m) = \hat{m}(q_m - c)$ ist. Wird letztere Formel umgestellt, ergibt vollständige Induktion nach dem Polynomgrad n die Behauptung.□

Satz: Für die BBP-Reihen $s_k := \dagger_{n=1}^{\omega} p(n)q(n)b^n$ mit $b \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 2}$ und ganzzahligen Polynomen bzw. Reihen p und $q \in {}^{\omega}\mathbb{Z}$ mit $q(n) \neq 0$ und $\text{deg}(p) < \text{deg}(q)$ gilt $s_k \notin {}^{\omega}\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ wegen $\text{den}(s_k) \geq b^m > \omega$ mit $m \in \mathbb{N}^*$.□

Satz: Der Abstand zweier benachbarter reeller ω -AZen beträgt maximal $\Omega/\hat{\omega}$ mit der nicht ω -algebraischen Omega-Konstante $\Omega = \hat{\epsilon}^{\Omega} = W(1)$ (s. u. Lambertsche W -Funktion).

Beweis: Der Abstand der reellen ω -AZen ist um ± 1 herum am größten. Die Zahl 1 approximiert ein $x \in {}^{\omega}\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$, das die Polynom- oder Reihengleichung $\hat{x}\hat{\omega} = 1$ für $x > 1$ oder $x^m = -\hat{x}\hat{\omega}$ für $x < 1$ erfüllt.□

Approximationssatz für reelle ω -AZen: Der durchschnittliche Fehler, um jede reelle ω -AZ vom Grad $n > 1$ durch eine reelle ω -AZ vom Grad $m < n$ zu approximieren, ist asymptotisch gleich $|{}^{\omega}\mathbb{Z}|^{-m}\hat{\epsilon}\hat{\omega}\zeta(\hat{m})\hat{\kappa}$.

Beweis: Die Anzahl der ω -AZ und innerhalb unveränderter Grenzen nahezu gleichmäßig verteilten Zahlen nimmt in ${}^{\omega}\mathbb{R}$ pro Grad mehr ca. um den Faktor $|{}^{\omega}\mathbb{Z}|$ zu. Der Fehler entspricht dem Abstand der ω -AZen untereinander. In ${}^{\omega}\mathbb{C}$ liegen ω -AZen weniger dicht.□

Folgerung: Zwei verschiedene reelle ω -AZen haben durchschnittlich mindestens den Abstand $|{}^{\omega}\mathbb{Z}|^{-\hat{\omega}}\hat{\epsilon}\hat{\omega}\hat{\pi}$. Die genaue Bestimmung des Minimalabstands erfordert ein unendliches nicht-lineares nicht-konvexes Optimierungsproblem zu lösen. Damit haben reelle ν -AZen eine Approximationsordnung von $O(\nu)$. Dies widerlegt den Satz von Thue-Siegel-Roth, der von falschen Voraussetzungen ausgeht.□

Größte-Primzahl-Kriterium (GPK) für ω -AZen: Gilt bei gekürzten Brüchen $r := \hat{a}\hat{p}\hat{b} \pm \hat{s}\hat{t} \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ mit natürlichen a, b, s und $t, \hat{a}\hat{b}\hat{s}\hat{t} \neq 0$ und $a + s > 2$ sowie der (zweit-) größten Primzahl $p \in {}^{\omega}\mathbb{P}$, $p \nmid b$ und $p \nmid s$, so gilt $r \notin {}^{\omega}\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$, da der Primzahlsatz $\text{den}(\hat{a}\hat{p}\hat{s}(b\hat{s} \pm \hat{a}\hat{p}\hat{t})) \geq \hat{p} \geq \hat{\omega} - O(\epsilon\omega\hat{\omega}^2) > \omega$ impliziert.□

Satz: Die Konstanten von Catalan (G), Gieseking ($\pi_{\epsilon\beta}$), Smarandache (S_1) und Taniguchi (C_T) sind nicht ω -algebraisch aufgrund des **GP**Ks. \square

Satz: Es gilt $\pi \notin {}^\omega\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$, sofern die unterschiedlichen Darstellungen als Wallis-Produkt oder Produktdarstellung der Gammafunktion für den Wert $\hat{2}$ akzeptiert werden (s. Nichtstandardanalysis), oder alternativ durch Anwendung des **GP**Ks auf die Leibnizsche Reihe oder die $\arcsin(x)$ -**TR** für $x = 1$. \square

Satz: Die Konstanten von Artin (C_{Artin}), Baxter (C^2), Chaitin (Ω_F), Champernowne (C_{10}), Copeland-Erdős (C_{CE}) (gilt bei jeder Basis aus ${}^v\mathbb{N}^*$), Erdős-Borwein (E), Feller-Tornier (C_{FT}), Flajolet und Richmond (Q), Glaisher-Kinkelin (A), Heath-Brown-Moroz (C_{HBM}), Landau-Ramanujan (K), Liouville (\mathcal{L}_{Li}), Murata (C_M), Pell (P_{Pell}), Prouhet-Thue-Morse (C_{PTM}), Sarnak (C_{sa}) und Stephen (C_S) sowie die Euler- bzw. Landau-Totient-Konstante (ET bzw. LT), die Primzahlzwillingskonstante (C_2) und die Carefree-Konstanten (K_1, K_2 und K_3) sind nicht ω -algebraisch, da sonst eine Primzahlpotenz aus Zähler oder Nenner kürzbar wäre. \square

Satz: Die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen samt ihren Umkehrfunktionen, die Digammafunktion ψ , die Lambertsche W -Funktion, die Funktion Ein , der (hyperbolische) Integralsinus $S(h)i$, die Eulersche Betafunktion B und mit $s, u \in {}^\omega\mathbb{N}^*$ sowie $t \in {}^\omega\mathbb{N}$ die verallgemeinerte Fehlerfunktion E_t , die hypergeometrische Funktion ${}_0F_t$, die Fresnel-Integral-Funktionen C und S und die Bessel-Funktion I_t bzw. die erster Gattung J_t , die Legendresche Funktion χ_t , die Polygammafunktion ψ_t , die verallgemeinerte Mittag-Leffler-Funktion $E_{s,t}$, die Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\omega} \tilde{n}^s f(n)$ mit maximal endlichen reellen $|f(n)|$, die Primzetafunktion $P(s)$, der Polylogarithmus Li_s sowie die Lerchsche Zeta-Funktion $\Phi(q, s, r)$ liefern für reelle Argumente und maximal endliche reelle $|q|$ und $|r|$, bei denen die zugehörige **TR** konvergiert, keine ω -**A**Zen.

Beweis: **GP**K, Dirichletscher Primzahlsatz und Wallis-Produkt liefern die Behauptung. Sie folgt bei der Digammafunktion aus dem Fehlen der ω -Algebraizität der Eulerschen Konstante γ (s. u.). \square

Satz von Gelfond-Schneider: Mit $a, c \in {}^\omega\mathbb{A}_{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{B}$ und infinitesimalem $\varepsilon, b \in {}^\omega\mathbb{A}_{\mathbb{C}} \setminus {}^\omega\mathbb{R}$ gilt $a^b \notin {}^\omega\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$.

Indirekter Beweis: Die Minimalpolynome p (und q) von c^r bzw. $c^{r \pm \varepsilon} = a^b$ mit maximalem $r \in {}^\omega\mathbb{R}_{>0}$ und $f = p(q)$ ergeben den Widerspruch ${}^1f(c^{r(\pm\varepsilon)}) \neq 0 = (f(c^r) - f(c^{r \pm \varepsilon})) / (c^r - c^{r \pm \varepsilon}) = {}^1f(c^{r(\pm\varepsilon)})$. \square

Satz: Mit $Li_s(z) := \sum_{n=1}^{\omega} \tilde{n}^s z^n, z \in {}^1\hat{\mathbb{C}}$ und $s \in {}^\omega\mathbb{C}$ sei $\gamma := Li_1(1) - \varepsilon\omega = \uparrow_1^{\omega}([\tilde{x}] - \tilde{x}) \downarrow x$, wobei Umsummieren $\gamma \in]0, 1[$ zeigt. Wird $\varepsilon\omega = Li_1(\hat{2}) \ 2\omega$ akzeptiert, so gilt $\gamma \notin {}^\omega\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ auf $\mathcal{O}(\hat{2}^{\omega} \tilde{\omega} \ \varepsilon\omega)$ genau.

Beweis: Aus der **GR** folgt $-\varepsilon(-\hat{x}) = Li_1(x) + \mathcal{O}(\tilde{\omega}x^{\hat{\omega}}/\hat{x}) + t(x) \downarrow x$ für $x \in [-1, 1 - \tilde{v}]$ und $t(x) \in {}^\omega\mathbb{R}$. Dann werden der (kleine) fermatsche Satz und das **GP**K auf den $(\tilde{p}(1 - 2^{-p} \ 2\omega))$ für $p = \max {}^\omega\mathbb{P}$ angewandt. \square

Satz: Nur dann gilt $\sum_{n=-1}^{\omega} \tilde{a}_n \tilde{b}_n \notin {}^\omega\mathbb{R}$ für beliebige $b_n \in {}^\omega\mathbb{N}^*$, wenn dies ebenfalls für $\sum_{n=-1}^{\omega} \tilde{a}_n$ oder $\tilde{a}_{-1} - \tilde{a}_{\omega}$ mit $a_n \in {}^\omega\mathbb{N}^*$ zutrifft, da sich $b_n := 1 (+ a_n)$ (Teleskopsumme) setzen lässt (vgl. [6], S. 346). \square

Satz: Aus $p^2 \nmid \text{num}(q) \text{den}(q)$ für alle $p \in {}^\omega\mathbb{P}$ mit $q \in Q := {}^\omega\mathbb{R}_{>0} \ni q^x$ und $2\omega \gg |x| \in {}^\omega\mathbb{R}$ folgt $x \in {}^\omega\mathbb{Z}$.

Indirekter Beweis: Sei o. B. d. A. $x > 0$. Da für nicht zu großes $x \in {}^\omega\mathbb{N}^*$ der Satz gilt, sei nun $x \in Q \setminus {}^\omega\mathbb{N}^*$. Wegen $q^x \in {}^\omega\mathbb{A}_{\mathbb{R}} \setminus Q$ sei nun $x := k/d \in {}^\omega\mathbb{R}_{>0} \setminus Q$ mit $d, k \in \mathbb{N}^*$ und $d \perp k$. Also gilt $q^k = r^d$ mit $r \in Q$. Der Fundamentalsatz der Arithmetik weist den Zähler oder Nenner von q bzw. r größer als 2^ω aus. \square

Bemerkung: Der vorige Satz beweist die Vermutung von Alaoglu und Erdős, dass p^x und q^x genau dann ν -reell für verschiedene $p, q \in {}^v\mathbb{P}$ sind, wenn $x \in {}^v\mathbb{Z}$ mit nicht zu großem $|x|$ gilt.

Beispiel: Gibt es in $m_k := \left\lfloor m_k^{\hat{3} - \chi_{2\mathbb{N}}(m_k)} \right\rfloor$ keine Zyklen, folgt $m_i = 1$ für jedes $m_0 \in ({}^\omega)\mathbb{N}^*$.

Satz von Collatz: Aus $\hat{n}_k := n_k + \chi_{2\mathbb{N}}(\hat{n}_k)(5n_k + 2)$ folgt $n_i \in \{1, 2, 4\}$ für jedes $n_0 \in ({}^\omega)\mathbb{N}^*$.

Beweis: Ist der triviale Zyklus (hier nach [27]) der einzige, unterschreitet jedes solche öfter ab- als aufsteigende Verfahren jedes $n_0 \geq 2$, wie es der Erwartungswert von $3^{\hat{2}}/2$ des vorigen Wertes anzeigt. \square

Definition: Erfüllen zwei Zahlen $x_0, y_0 \in {}^\omega\mathbb{C}^*$ keine nicht-triviale Polynomgleichung $p(x, y) = 0$, so heißen sie ω -algebraisch unabhängig. Δ

Satz: Das **GPK** liefert mit $\epsilon = (1 + \tilde{p})^p$ für maximales $p \in {}^\omega\mathbb{P}$ und π als Wallis-Produkt paarweise ω -algebraisch unabhängige Darstellungen von $A, C_2, \gamma, \epsilon, K$ und π . \square

Bemerkung: Die Bedingungen sind nicht hinreichend wie die Beispiele $a_n := 1, b_n := 2$ bzw. $(a_n) := (12, 12, 12, 12, 12, 6, 12, 20, 30, 42, \dots, \acute{\omega}\omega), b_n := 1$ mit den Summen $\acute{\omega} + 1$ bzw. $(\omega - 2)/\acute{\omega}$ zeigen. Zu $(n!)$ bzw. (a_n) mit $\acute{a}_n = a_n \acute{a}_n$ gilt $\prod_{n=1}^\omega \widetilde{a_n b_n} \notin {}^\omega\mathbb{A}_\mathbb{R}$ für $b_n := n + 2$ bzw. $b_n := 1$.

Satz von Beal: Für $a^m + b^n = c^k$ mit $a, b, c, d, e, r, s \in {}^\omega\mathbb{N}^*$ und $k, m, n \in {}^\omega\mathbb{N}_{\geq 3}$ gilt $d := \text{ggT}(a, b, c) > 1$.

Indirekter Beweis: Sei $(da)^n + (db)^m = (dc)^n$ der nötige Ansatz, um d nach Rechnen mod d herauszukürzen. Wird verallgemeinert $b^s + e^m = c^s$ wieder mit d^m multipliziert, folgt $b = 1, c = d$ und $s \neq m \notin 2\mathbb{N}$. Die zweite allgemeine Form $1 + d^s = e^m$ ergibt ebenso mit $m \neq s \notin 2\mathbb{N}$ die Behauptung durch Widerspruch. \square

Folgerung: Wegen $m \neq s$ wird $a^n + b^n = c^n$ von keinem $n \in {}^\omega\mathbb{N}_{\geq 3}$ für beliebige $a, b, c \in {}^\omega\mathbb{N}^*$ erfüllt. \square

Satz von Catalan: Es gilt $\{(m, n, x, y) \in {}^\omega\mathbb{N}_{\geq 2}^4 : 1 + x^m = y^n\} = \{(3, 2, 2, 3)\}$.

Indirekter Beweis: Der vorige Satz ergibt $\min(m, n) = 2$. Mit $\acute{n} \in {}^\omega 2\mathbb{N}^*$ zeigt Quadrieren $1 + 4\acute{x}^2 = (1 + \acute{y})^n$ und $(1 + 2^r z)^n \equiv 1 + 2^r \acute{x}^2 \equiv 1 \pmod{2^r}$ für $\acute{y} = 4z$ und alle $r \in {}^\omega\mathbb{N}_{\geq 3}$ sowie $1 + x^2 \equiv 2 \neq 0 \equiv 2^n \acute{y}^n \pmod{8}$. Aus $\acute{m} \in {}^\omega 2\mathbb{N}^*$ und $s \in {}^\omega\mathbb{N}^*$ folgt $x^m = \acute{y}\acute{y}$ mit $s^m \neq \acute{y} \in {}^\omega 2\mathbb{N}^*$ und es gilt $x^m = 8\acute{s}\acute{s} = 8$. \square

Satz von Erdős-Moser: Die Faulhabersche Formel (s. Nichtstandardanalysis) ergibt für $k, n \in {}^\omega\mathbb{N}^*$, dass mit $n\acute{n} \mid \prod_{m=1}^n m^k = \acute{n}^k$ nur die Lösung $k = 1 = \acute{n}$ wegen $1 < n \nmid \acute{n}$ existiert. \square

Drei-Kuben-Satz: Es gilt $S := \{n \in \mathbb{Z} : n \not\equiv \pm 4 \pmod{9}\} = \{n \in \mathbb{Z} : n = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)c(a-b+c) = (a+c)^3 + (b-c)^3 + c^3\} \subset a^3 + b^3 + c^3 + 6\mathbb{Z}$, da unabhängige vollständige Induktion nach den gleichberechtigten Variablen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ zunächst $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\} \subset S$ zeigt und dann die Behauptung. \square

Satz von Brocard: Es gilt $\{(m, n) \in {}^\omega\mathbb{N}^2 : n! + 1 = m^2\} = \{(5, 4), (11, 5), (71, 7)\}$.

Beweis: Aus $n! = \acute{m}\acute{n}$ folgt $m = \acute{r} \pm 1$ für $r \in {}^\omega\mathbb{N}^*$ und $n \geq 3$. Also ist $n! = \acute{r}(\acute{r} \pm 2) = 8s(\acute{s} \pm 1)$ mit $s \in {}^\omega\mathbb{N}^*$. Gelte $2^q \mid n!$ und $2^q \nmid n!$ für maximales $q \in {}^\omega\mathbb{N}^*$. Damit ist $n! = 2^q(\acute{u} + 1)$ für $u \in {}^\omega\mathbb{N}^*$ und zwingend $n! = 2^q(2^{q-2} \pm 1)$. Die Primfaktorzerlegung von $n!$ erfordert dann $n \leq 7$, was die Behauptung ergibt. \square

Wilsonscher Primzahlsatz: Nur für die Primzahlen $p \in \{5, 13, 563\}$ gilt $q := p^2 \mid (p! + 1)$.

Indirekter Beweis: Wird danach eine geeignete Zweierpotenz links addiert und subtrahiert, liefert Division durch \acute{p} oder \acute{p} in $\acute{n}q + \acute{q} = \acute{p}!$ für $n \in {}^\omega\mathbb{N}^*$ rechts eine höhere ab hinreichend großem p . \square

Satz von Littlewood in der herkömmlichen Mathematik: Mit $\|\cdot\|_d$ als Abstand zur nächsten ganzen Zahl gilt $\liminf_{n \rightarrow \infty} n \|na\|_d \|nb\|_d = 0$ für alle $a, b \in {}^v\mathbb{R}$ und $n \in {}^v\mathbb{N}^*$.

Beweis: Für $k, m \in {}^v\mathbb{N}^*$ als Nenner der Kettenbruchentwicklung von a bzw. b mit Genauigkeit $g \in {}^v\mathbb{R}_{>0}$ und n/km immer wieder ganz liefert der dirichletsche Approximationssatz (s. [25], S. 63):

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n \|na\|_d \|nb\|_d = \liminf_{n \rightarrow \infty} n O(\tilde{n})^2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} O(\tilde{n}) = 0. \square$$

Widerlegung durch die Nichtstandardmathematik: Für $a = b := \tilde{\omega}^3$ gilt $\omega \|a\|_d \|b\|_d = 1.0$

Beispiel: Für $s \in ({}^\omega)\mathbb{C}$ mit $\text{Re}(s) \leq 1$ und $z := \tilde{z}^s$ hat $\zeta(s) = \prod_{n=1}^\omega \tilde{n}^{-s}$ definitiv keine analytische Fortsetzung (vgl. [13], S. 4) und ist damit nullstellenfrei. Dies widerlegt die Riemannsche Vermutung:

$$\prod_{n=1}^\omega \tilde{n}^{-s} = z \prod_{n=1}^{\acute{\omega}} \tilde{n}^{-s} - \prod_{n=1}^\omega \tilde{n}^{-s} \neq z \prod_{n=1}^{\omega(2)} \tilde{n}^{-s}.$$

Satz: Da die Dirichletsche L -Funktion $L(s, \chi) = \prod_{n=1}^\omega \chi(n) \tilde{n}^{-s}$ offenbar nur Nullstellen für $s = 0$ und nichttriviale Dirichlet-Charaktere $\chi(n)$ hat, widerlegt sie die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung. \square

6 Euklidische Geometrie

Das Folgende setzt Mengenlehre, Topologie und Nichtstandardanalysis voraus.

Definition: Sei R ein euklidischer Raum als Unterraum von \mathbb{R}^n mit $n \in {}^\omega\mathbb{N}_{\geq 3}$ (s. Mengenlehre). Zwei verschiedene Punkte als Elemente von R heißen (Punkte-)Paar. Ein (ein-) zweidimensionaler Unterraum von R wird als (Gerade) Ebene bezeichnet. Eine eindimensionale Punktmenge in R , bei der jeder Punkt lückenlos mindestens einen und höchstens zwei benachbarte Punkte hat, heißt Linie. Der Abstand ist durch die euklidische Norm $\|\cdot\|$ gegeben und ergibt aufsummiert die euklidische Weglänge $A.\Delta$

Definition: Eine Strecke ist eine zusammenhängende Teilmenge einer Geraden, deren Anfangs- und Endpunkt sie genau bestimmen und mit jeweils nur einem Nachbarn endlichen Abstand haben. Zwei Strecken mit einem gemeinsamen inneren Punkt schneiden sich. Zwei durch Translation auseinander hervorgegangene Strecken heißen parallel. Die Punkte der Ebene gleichen Abstands (genannt Radius) zu einem weiteren Punkt werden als Kreis bezeichnet, der mit seinem Inneren eine Kreisscheibe bildet. Δ

Ergebnis: Bei kürzer definierten Geraden gibt es für das Axiom von Pasch, das der Vollständigkeit und diverse andere Axiome sowie ihre Äquivalente mit Obigem viele Gegenbeispiele. Das Unterraumkonzept kann Hilberts Inzidenzaxiome I.6 und I.8 beweisen. Bestimmt eine Gerade eine parallele Gerade durch einen weiteren Punkt mit dem kürzesten Abstand eindeutig, ist das Parallelenaxiom in der euklidischen Geometrie redundant. Die Axiome der Anordnung und Kongruenz sind überflüssig.

Entgegen Hilberts Inzidenzaxiom I.4 reichen drei verschiedene Punkte nicht aus, um eine Ebene eindeutig zu bestimmen, da es verschiedene Unendlichkeiten gibt. Hilberts Inzidenzaxiom I.7 ist falsch (vgl. [11], S. 2 - 17), da Ebenen im Unendlichen dennoch begrenzt sind und sich genau in einem Punkt schneiden können. Der Hauptsatz der Mengenlehre erlaubt alle (drei antiken) exakt nicht lösbaren Probleme über den Strahlensatz und Farey-Folgen ([25], S. 62 f.) mit beliebiger Genauigkeit zu lösen.

Sind zwei Geraden lediglich dann parallel, wenn sie in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, ist das Parallelenaxiom falsch: Der Kehrwert des Abstands des weiteren Punktes zu der ursprünglichen Geraden kann mindestens unendlich oder kleiner als ${}^\omega|\mathbb{N}|$ sein und dann lassen sich unendlich viele verschiedene Geraden durch den weiteren Punkt legen, ohne die ursprüngliche Gerade zu schneiden. Hilberts vage Formulierung des Vollständigkeitsaxioms macht es letztlich nicht zukunftstauglich.

Das Archimedische Axiom ist auf eine unendliche natürliche Anzahl von Abtragungen einer Strecke auszudehnen, die nicht über den Anfangs- oder Endpunkt einer Geraden hinaus geschehen können. Es ist im endlichen Fall durch den Archimedischen Satz (s. Mengenlehre) zu ersetzen. Das Axiom von Pasch ist ebenso entbehrlich, da eine Gerade aufgrund ihrer maximalen Länge das Innere eines Dreiecks vollständig passieren muss, also auch ihren Rand, sofern einer ihrer Punkte in diesem Inneren liegt.

Lotsatz: Mit $n \in {}^\omega\mathbb{N}_{\geq 2}$ enthält jede konvexe Menge S aus ${}^\omega\mathbb{R}^n$ einen Punkt, der das Fällen von \hat{n} Loten auf ∂S (auch auf eine Ecke) erlaubt, da dies in der Ebene alle 90° möglich ist (vgl. [2], S. 14 f.). \square

Toeplitz-Vermutung: Jede geschlossene Jordan-Kurve besitzt ein einbeschriebenes Quadrat.

Gegenbeispiele: Das rechtwinklige Dreieck mit Kathetenlänge ι und das stumpfwinklige Dreieck mit dem geeignet infinitesimal verschobenen Eckpunkt des höchstens einen einbeschriebenen Quadrates. \square

Satz: Ein geeignetes infinitesimales Nebeneinanderlegen äquichordaler Punkte führt zu einem Jordanbereich mit mehr als einem äquichordalen Punkt (vgl. [2], S. 9 f.). \square

Satz von Fickett: Für jede Lage zweier überlappender kongruenter n -Quader P und Q (s. [2], S. 25) mit $n \in {}^\omega\mathbb{N}_{\geq 2}$, $\hat{m} := \hat{n}$ und dem exakten Standardmaß μ gilt, wobei μ für $n = 2$ gerade A ist:

$$\tilde{m} < r := \mu(\partial P \cap Q) / \mu(\partial Q \cap P) < m.$$

Beweis: Das zugrundeliegende Extremalproblem hat sein Maximum für Rechtecke mit den Seitenlängen s und $s + \hat{\iota}$. Mit $q := 3 - \hat{\iota}s$ gilt $\min r = \tilde{q} \leq r \leq \max r = q$. Der Beweis für $n > 2$ verläuft analog. \square

7 Lineare Optimierung

Das Folgende setzt ebenfalls Mengenlehre, Topologie und Nichtstandardanalysis voraus.

Durchmessersatz für Polytope und Polyeder: Jeder Durchmesser eines durch m Restriktionen gegebenen n -dimensionalen Polytops bzw. Polyeders mit $m, n \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 2}$ ist maximal $2(m + n - 3)$.

Beweis: Maximal m Hyperebenen lassen sich zu einem unvollständigen Zyklus der Dimension 2 zusammenstellen und es gibt höchstens $n - 2$ Ausweichmöglichkeiten zur Seite in den restlichen Dimensionen. Das Überwinden jeder minimalen Strecke benötigt maximal zwei Kanten und liefert den Faktor 2. \square

Satz zum Strassen-Algorithmus: Für hinreichend großes $n := 2^\ell$, $\ell \in {}^v\mathbb{N}^*$, $\beta := 2^7$ und $A \in {}^v\mathbb{C}^{n \times n}$ beweist die GR die Verkürzung der Laufzeit $T(n) = O(n^\beta)$ (s. [5], S. 31 ff.) um ca. $\frac{1}{3}$ zur Berechnung von

$$AA^H = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^H & A_{21}^H \\ A_{12}^H & A_{22}^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}A_{11}^H + A_{12}A_{12}^H & A_{11}A_{21}^H + A_{12}A_{22}^H \\ A_{21}A_{11}^H + A_{22}A_{12}^H & A_{21}A_{21}^H + A_{22}A_{22}^H \end{pmatrix}. \quad \square$$

Satz zur schnellen Matrixmultiplikation: Mit A wie $B = (b_{ij}) \in {}^v\mathbb{C}^{n \times n}$ und n wie zuvor lässt sich AB für

$$s := \min\{2^k > \max_{i,j}(|a_{ij}|^2, |b_{ij}|^2)\hat{n} : k \in {}^v\mathbb{Z}\}$$

aus

$$A_{11}(sB_{11} + B_{12}), A_{21}(sB_{11} + B_{12}), A_{12}(sB_{21} + B_{22}), A_{22}(sB_{21} + B_{22})$$

durch Rechnen modulo s in der Laufzeit $O(p^2)$ mit $p = \ell n$ bestimmen (s. Anhang). \square

Das hybride Intex-Merit-Verfahren für LPs

Problemstellung. Seien

$$A \in {}^v\mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in {}^v\mathbb{R}^m, \quad c \in {}^v\mathbb{R}^n, \quad e \in {}^v\mathbb{R}.$$

Betrachtet wird zunächst das primale LP

$$\max e + c^\top x \quad \text{unter} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0.$$

Das zugehörige duale LP lautet

$$\min e + b^\top y \quad \text{unter} \quad A^\top y \geq c, \quad y \geq 0.$$

Für zulässige Paare (x, y) gilt nach schwacher Dualität

$$c^\top x \leq b^\top y.$$

Im Optimum verschwindet der Dualitätsspalt:

$$b^\top y - c^\top x = 0.$$

Bedeutung von pro. Der Parameter $\text{pro} \in \{1, -1\}$ legt die Interpretation der Eingabedaten fest.

Für $\text{pro} = 1$ wird das eingegebene Problem als maximierendes primales Problem gelesen:

$$\max e + c^\top x \quad \text{unter} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0.$$

Für $\text{pro} = -1$ wird die interne primal-duale Orientierung vertauscht. Das Verfahren arbeitet dann mit der transponiert-negierten Tableauform, so dass die interne Zielfunktion dieselbe geometrische Rolle spielt wie im maximierenden Fall. Der mathematische Zielwert darf dabei jedoch nicht mit falschem Vorzeichen ausgegeben werden. Deshalb wird der intern skalierte Zielfunktionswert bei der Rücktransformation mit pro versehen:

$$f_{\text{orig}} = e + \text{pro} \kappa f_{\text{int}}, \quad \kappa > 0.$$

Der Faktor pro gehört also zur Rücktransformation des internen Zielwertes, nicht zu den primalen und dualen Zulässigkeitsbedingungen selbst. Die Prüfgrößen

$$Ax \leq b, \quad A^\top y \geq c, \quad b^\top y - c^\top x \geq 0$$

werden immer in der jeweils zurücktransformierten Originalorientierung ausgewertet.

Satz. Das hybride Intex–Merit-Verfahren bestimmt für jedes lösbares **LP** der obigen Form eine primal-duale Lösung (x^o, y^o) , sofern die verwendete Rechengenauigkeit, die Relaxationsfolge und der abschließende Crossover (**CO**) die aktive Struktur des Problems auflösen. Der Intex-Kern arbeitet durch *Inter-/Ex*trapolationen. Für eine Matrixdichte $d \in [0, 1]$ und eine geeignete binäre Genauigkeitsskala $z(\tilde{\alpha}\rho)$ besitzt im unstrukturierten Fall die geometrische Intex-Phase die Ordnung

$$O(z(\tilde{\alpha}\rho)^2 dmn).$$

Wird die lineare Algebra durch Fast-Toeplitz-Dekomposition (**FTD**)/Fast-Shift-Recursive (**FSR**) strukturiert ausgeführt, tritt an die Stelle von dmn der jeweilige strukturierte Operatoraufwand. Sei $z := m + n$.

Intex-Relaxation. Statt unmittelbar

$$Ax \leq b, \quad A^T y \geq c, \quad b^T y - c^T x = 0$$

zu erzwingen, betrachtet das Intexverfahren mit $r \in [0, \rho]$ eine Familie relaxierter primal-dualer Polytope

$$P_r := \{(x, y)^T \in {}^v\mathbb{R}_{\geq 0}^z : b^T y - c^T x \leq r, Ax - b \leq r1_m, c - A^T y \leq r1_n\}.$$

Der Anfangsradius wird so gewählt, dass der Nullpunkt 0 sicher in P_ρ enthalten ist. Eine mögliche Wahl ist

$$\rho := s |\min\{b_1, \dots, b_m, -c_1, \dots, -c_n\}|, \quad s \in]1, 2],$$

gegebenenfalls nach vorheriger Skalierung und Verschiebung der Daten.

Das ursprüngliche **LP** ist genau dann gelöst, wenn ein Paar $(x, y) \in P_0$ gefunden wird. Wegen starker Dualität ist dies äquivalent zu

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad A^T y \geq c, \quad y \geq 0, \quad b^T y - c^T x = 0.$$

Damit lösen dieselben Variablen zugleich

$$\max\{c^T x : x \in {}^v\mathbb{R}_{\geq 0}^n, Ax \leq b\}$$

und

$$\min\{b^T y : y \in {}^v\mathbb{R}_{\geq 0}^m, A^T y \geq c\}.$$

Normierung und Skalierung. Vor der geometrischen Iteration werden Zielfunktion, rechte Seiten und Restriktionsmatrix normiert. Ziel ist nicht eine Veränderung des Problems, sondern eine balancierte Repräsentation der drei Fehlerarten

$$Ax - b, \quad c - A^T y, \quad b^T y - c^T x.$$

Die Skalierung soll vermeiden, dass eine der drei Größen numerisch dominiert. Um zu garantieren, dass die Zielfunktionskopplung im Gradientenabstieg der anschließenden Merit-Politur weder verschwindet noch die Hinge-Fehler numerisch überdeckt, wird initial eine skalare Lineartransformation angewendet. Konkret werden der Vektor c sowie der konstante Offset e mit dem Faktor $\lambda = \|c\|^{-1}$ (für $c \neq 0$) skaliert.

Unter dieser Transformation bleibt die primale Lösung x invariant, während die duale Lösung y und die absoluten Zielfunktionswerte streng linear mit λ skalieren. Am Ende des Gesamtverfahrens erfolgt eine exakte Rücktransformation in den ursprünglichen physikalischen Raum. Nach der Rechnung werden alle Variablen und Zielwerte in die ursprüngliche Orientierung zurücktransformiert. Insbesondere wird bei $\text{pro} = -1$ der intern entstandene Zielwert mit dem korrekten Vorzeichen ausgegeben.

Geometrischer Intex-Schritt. Innerhalb eines festen Polytops P_r wird ein innerer Schwerpunkt approximiert. Für jede Koordinate wird ein zulässiges Intervall bestimmt. Für $v \in P_r$ wird näherungsweise

$$v_k^* := \min \check{v}_k + \max \check{v}_k, \quad k = 1, \dots, z,$$

gebildet. So entsteht ein geometrischer Mittelpunkt $v = (x, y)^T$, der innerhalb der aktuellen Relaxation bleibt und als stabiler Ausgangspunkt für die nächste Radiusverkleinerung dient.

Aus den letzten Schwerpunktbewegungen wird anschließend extrapoliert. Dazu wird eine Richtung Δv gebildet und ein maximal zulässiger Schritt entlang

$$v(w) = v + w\Delta v, \quad w \geq 0,$$

bestimmt. Der neue Radius ergibt sich aus der kleinsten noch notwendigen Relaxation

$$r_{\text{neu}} = \min\{r \geq 0 : v(w) \in P_r\}.$$

Gelingt $r_{\text{neu}} = 0$, so ist ein primal-dual optimales Paar erreicht. Bleibt $r_{\text{neu}} > 0$ stabil von null getrennt, deutet dies auf Unlösbarkeit, fehlende Genauigkeit oder eine nicht aufgelöste aktive Struktur hin.

Intex als zulässiger Startpunkt. Der wesentliche Vorteil der Intex-Phase besteht darin, dass sie nicht blind im Außenraum sucht. Sie arbeitet mit relaxierten zulässigen Bereichen und liefert typischerweise einen Punkt, der primal-dual bereits gut orientiert ist:

$$Ax - b \lesssim r \mathbf{1}_m, \quad c - A^\top y \lesssim r \mathbf{1}_n, \quad b^\top y - c^\top x \lesssim r.$$

Dieser Punkt ist noch nicht notwendig optimal, aber häufig nahe an einer aktiven Fläche des optimalen Polytops. Genau dort setzt die Merit-Politur an.

Primal-duale Merit-Politur

Residuen. Für $x \geq 0$ und $y \geq 0$ seien

$$r^p(x) := \max(Ax - b, 0) \in {}^v\mathbb{R}^m,$$

$$r^d(y) := \max(c - A^\top y, 0) \in {}^v\mathbb{R}^n$$

die primalen und dualen Verletzungen. Der signierte Dualitätsspalt ist

$$g(x, y) := b^\top y - c^\top x.$$

Für ein maximierendes primales Problem ist nur

$$g_+(x, y) := \max(g(x, y), 0)$$

als positiver Spalt zulässigkeitsrelevant. Im exakten Optimum gilt

$$r^p(x) = 0, \quad r^d(y) = 0, \quad g(x, y) = 0.$$

Die unskalierten Kontrollgrößen lauten

$$p_\infty = \|r^p(x)\|_\infty, \quad d_\infty = \|r^d(y)\|_\infty, \quad g_{\text{abs}} = |b^\top y - c^\top x|.$$

Die primalen und dualen Zielfunktionswerte sind

$$p^* = c^\top x, \quad d^* = b^\top y.$$

Der konstante Offset e wird erst bei der Ausgabe addiert.

Merit-Funktion. Die Merit-Funktion fasst primale Verletzung, duale Verletzung und Dualitätsspalt zusammen:

$$\widehat{\Phi}(x, y) = \|r^p(x)\|_2^2 + \|r^d(y)\|_2^2 + \gamma^2 g_+(x, y)^2, \quad \gamma > 0.$$

In skalierten Variablen

$$x = S_x \check{x}, \quad y = S_y \check{y}$$

und mit diagonalen Residualgewichten

$$D_p = \text{diag}(d_p), \quad D_d = \text{diag}(d_d)$$

lautet die skalierte Form

$$\widehat{\Phi}(\check{x}, \check{y}) = \|D_p \max(AS_x \check{x} - b, 0)\|_2^2 + \|D_d \max(c - A^\top S_y \check{y}, 0)\|_2^2 + d_g^2 \max(b^\top S_y \check{y} - c^\top S_x \check{x}, 0)^2.$$

Optional kann ein kleiner Regularisierungsterm

$$\varepsilon (\|\check{x}\|_2^2 + \|\check{y}\|_2^2)$$

hinzugenommen werden.

Gradient. Mit

$$w_i^p = d_{p,i}^2 r_i^p(\check{x}), \quad w_j^d = d_{d,j}^2 r_j^d(\check{y}), \quad w_g = d_g^2 g_+(\check{x}, \check{y})$$

ergeben sich die Gradienten

$$\frac{\downarrow \Phi}{\downarrow \check{x}_j} = s_{x,j} \left(\sum_{i=1}^m A_{ij} w_i^p - c_j w_g \right), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\frac{\downarrow \Phi}{\downarrow \check{y}_i} = s_{y,i} \left(b_i w_g - \sum_{j=1}^n A_{ij} w_j^d \right), \quad i = 1, \dots, m.$$

Der Term $b_i w_g$ ist wesentlich: Der Gradient bezüglich y muss den Anteil von $b^\top y$ im Dualitätsspalt enthalten. Ohne diesen Beitrag wird die duale Seite falsch gesteuert.

Zulässige Schrittführung. Ausgehend vom Intex-Punkt wird ein Abstiegschritt berechnet. In der einfachen projizierten Variante gilt

$$\check{x}' = \Pi_{\mathbb{R}_+^n} \left(\check{x} - \alpha \nabla_{\check{x}} \widehat{\Phi} \right), \quad \check{y}' = \Pi_{\mathbb{R}_+^m} \left(\check{y} - \alpha \nabla_{\check{y}} \widehat{\Phi} \right).$$

In der zulässigen hybriden Variante wird auf eine harte Orthantprojektion während der Merit-Phase verzichtet. Stattdessen wird ein Schritt verworfen oder verkürzt, wenn er die zulässige Relaxation oder die Nichtnegativität verlassen würde. Dadurch bleibt der Charakter der Intex-Relaxation erhalten.

Ein Schritt wird nur akzeptiert, wenn eine Armijo-artige Bedingung erfüllt ist:

$$\widehat{\Phi}(\check{x}', \check{y}') \leq \widehat{\Phi}(\check{x}, \check{y}) - c_1 \alpha \left(\|\check{x}' - \check{x}\|_2^2 + \|\check{y}' - \check{y}\|_2^2 \right).$$

Andernfalls wird α reduziert.

Barzilai-Borwein-Schrittweite. Nach einem akzeptierten Schritt werden

$$s_k = \begin{pmatrix} \check{x}^k - \check{x}^k \\ \check{y}^k - \check{y}^k \end{pmatrix}, \quad q_k = \begin{pmatrix} \nabla_{\check{x}} \widehat{\Phi}(\check{x}^k, \check{y}^k) - \nabla_{\check{x}} \widehat{\Phi}(\check{x}^k, \check{y}^k) \\ \nabla_{\check{y}} \widehat{\Phi}(\check{x}^k, \check{y}^k) - \nabla_{\check{y}} \widehat{\Phi}(\check{x}^k, \check{y}^k) \end{pmatrix}$$

gebildet. Für $\eta_k := s_k^\top q_k > 0$ wird $\alpha_k = \tilde{\eta}_k s_k^\top s_k$ gesetzt und anschließend auf ein Intervall $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ beschränkt. Ist $\eta_k \leq 0$ wird die bisherige brauchbare Schrittweite beibehalten oder eine konservative Startschrittweite verwendet.

Algebraischer CO

Zweck. Die Merit-Phase ist ein Verfahren erster Ordnung. Sie reduziert Residuen und Dualitätsspalt, liefert aber nicht immer exakt die aktive Basis. Deshalb folgt bei Bedarf ein algebraischer CO. Er versucht aus dem Näherungspunkt (x, y) eine exakt zulässige primal-duale Lösung zu rekonstruieren.

Aktive Kandidaten. Primal aktive Restriktionen haben solche Indizes i , für die $a_i^\top x \approx b_i$ gilt. Aktive Nichtnegativitätsbedingungen haben solche Indizes j , für die $x_j \approx 0$ gilt. Aus diesen Kandidaten werden Gleichungssysteme der Größe n gebildet. Ein primaler Kandidat wird akzeptiert, wenn das rekonstruierte x erfüllt:

$$x \geq 0, \quad Ax \leq b.$$

Anschließend wird ein dualer Kandidat y gesucht mit

$$y \geq 0, \quad A^\top y \geq c.$$

Nur wenn zusätzlich $|b^\top y - c^\top x|$ klein genug ist, wird das Paar als optimale Lösung akzeptiert.

Zertifizierter CO. Ein isoliert guter primaler Kandidat reicht nicht aus. Ebenso reicht ein isoliert guter dualer Kandidat nicht aus. Übernommen wird nur ein primal-duales Paar, das gleichzeitig

$$p_\infty = 0, \quad d_\infty = 0, \quad g_{\text{abs}} = 0$$

bis zur geforderten Toleranz erfüllt. Dadurch wird vermieden, dass ein nur formal zulässiger dualer Kandidat mit falschem Zielwert die Lösung ersetzt.

Gestuffer **CO**. Der gestufte **CO** begrenzt die kombinatorischen Kosten maßgeblich.

In Stufe 1 ergeben sich die wahrscheinlich aktiven Restriktionen aus kleinen Slacks $b_i - a_i^T x$ und Variablen x_j . Diese Stufe ist schnell, kann aber bei schlecht getrennten aktiven Mengen scheitern.

In Stufe 2 wird der Kandidatensatz erweitert. Zusätzliche Restriktionen mit mittleren Slacks werden zugelassen. Dadurch steigt die Erfolgswahrscheinlichkeit, aber auch die Zahl der getesteten Basen.

In Stufe 3 wird ein vollständiger oder nahezu vollständiger Fallback zugelassen. Diese Stufe ist teuer, aber robust. Sie wird nur verwendet, wenn vorherige Stufen keine zertifizierte primal-duale Lösung liefern.

Der **CO** kann außerdem vollständig abgeschaltet werden. Dann gibt das Verfahren den besten bis dahin gefundenen Intex–Merit-Punkt aus, ohne algebraische Basisrekonstruktion. Flankiert wird diese algorithmische Begrenzung durch eine strikt speichereffiziente Implementierung auf Softwareebene. Die innere Schleife der kombinatorischen Kandidatensuche arbeitet vollständig allokatonsfrei.

Sämtliche Vektoren und Index-Arrays werden vorab präallokiert und pro Iteration lediglich überschrieben. Dadurch wird kein dynamischer Speicherdruck erzeugt und die *Garbage Collection* der Laufzeitumgebung wird in der kritischen Phase nicht ausgelöst. Durch diese mechanische Effizienz verliert die theoretische Worst-Case-Komplexität der Basissuche in der Praxis ihren Schrecken, da das Durchlaufen der Permutationen lediglich minimale CPU-Zyklen beansprucht.

Timeout. Wird ein Zeitlimit erreicht, bricht das Verfahren kontrolliert ab und liefert den besten bis dahin bekannten Zustand:

$$x_{\text{best}}, \quad y_{\text{best}}, \quad p_{\infty}, \quad d_{\infty}, \quad g_{\text{abs}}, \quad p^*, \quad d^*.$$

Ist bis dahin keine zertifizierte Lösung gefunden worden, wird dies ausdrücklich angezeigt. Ein Timeout ist daher kein mathematischer Fehlschluss, sondern ein unvollständiger Rechenstand.

Verhalten bei nicht lösbaren **LPs**

Für ein primal unzulässiges **LP** existiert kein $x \geq 0$ mit $Ax \leq b$: Weder Intex kann den Radius bis $r = 0$ senken, noch Merit $p_{\infty} = 0$ erzwingen. Typischerweise bleibt $p_{\infty} > 0$ oder die Radiusreduktion stagniert.

Ist das duale **LP** unzulässig, dann existiert kein $y \geq 0$ mit $A^T y \geq c$. Dann bleibt gewöhnlich $d_{\infty} > 0$. Primal entspricht dies häufig einem unbeschränkten primalen Problem.

Ist das Problem zwar formal lösbar, aber numerisch schlecht skaliert oder degeneriert, können Intex und Merit stagnieren, obwohl eine Lösung existiert. Dann entscheidet der **CO**, ob die aktive Struktur trotzdem algebraisch rekonstruiert werden kann. Gelingt dies nicht, liefert das Verfahren keinen falschen Optimalitätsnachweis, sondern einen nichtzertifizierten Näherungspunkt.

Damit unterscheidet das Verfahren praktisch vier Fälle:

$$\begin{array}{ll} p_{\infty} = d_{\infty} = g_{\text{abs}} = 0 & \text{zertifiziert gelöst,} \\ p_{\infty} > 0 & \text{primale Zulässigkeit nicht erreicht,} \\ d_{\infty} > 0 & \text{duale Zulässigkeit nicht erreicht,} \\ p_{\infty}, d_{\infty} \approx 0, g_{\text{abs}} > 0 & \text{zulässig, aber Optimalität nicht erreicht.} \end{array}$$

Ein vollständiges Unlösbarkeitszertifikat im Sinne eines Farkas-Zeugen ist damit noch nicht automatisch enthalten. Es kann jedoch als zusätzliche Diagnosestufe ergänzt werden.

Strukturierte lineare Algebra durch **FTD** und **FSR**

Motivation. Intex, Merit und **CO** benötigen wiederholt Operationen der Form

$$Ax, \quad A^T y, \quad b^T y, \quad c^T x.$$

Für eine allgemeine dünn besetzte Matrix kostet dies $O(\text{nnz}(A))$. Für eine dichte unstrukturierte Matrix ergibt sich $O(mn)$. Besitzt A Struktur, gilt dies nicht zwingend. Bei Toeplitz-, Hankel-, blockzirkulanten oder faltungsartigen Matrizen lassen sich die Operatorauswertungen durch **FTD** und **FSR** ersetzen.

FTD. Die **FTD** nutzt, dass viele strukturierte Matrizen entlang ihrer Diagonalen nur langsam variieren oder durch Faltungsoperatoren beschrieben werden können. Eine Matrix $A \in {}^v\mathbb{R}^{m \times n}$ wird dann nicht als beliebige Ansammlung von mn Einträgen behandelt, sondern durch wenige Generatoren beschrieben. Formal wird eine Darstellung der Art $A \approx T_1 T_2$ gesucht, wobei T_1 und T_2 Toeplitz-, Hankel- oder verwandte Faltungsoperatoren sind.

Die Einträge dieser Operatoren werden aus lokalen Mittelwerten, diagonalen Summen und rekursiven Ausgleichsschritten gewonnen. Statt der vollen Matrix werden nur Generator-, Diagonal- oder Faltungsdaten gespeichert. Matrix-Vektor-Produkte, transponierte Produkte und ausgewählte Projektionen können dadurch strukturiert ausgeführt werden.

Ist die effektive Strukturweite ℓ und $p = \ell n$, so ergibt sich für strukturierte Operationen typischerweise ein Aufwand der Form $O(p^2)$ anstelle dichter unstrukturierter Kosten.

FSR. Die **FSR** ergänzt die **FTD** arithmetisch. Während die **FTD** eine strukturierte Darstellung des Operators liefert, organisiert **FSR** die tatsächliche Rechnung rekursiv und wortlängenschonend. Eine Matrix oder ein Operator wird dazu in hoch- und niedriggewichtige Anteile zerlegt:

$$A = (A_{\text{hi}} \ll s) + A_{\text{lo}},$$

wobei $\ll s$ eine Verschiebung um s Stellen bezeichnet. Produkte, Schur-Komplemente, inverse Teilsysteme und Rekonstruktionen werden rekursiv aus kleineren Anteilen aufgebaut.

Der Vorteil besteht darin, dass Zwischenwerte kontrolliert bleiben und BigInt- beziehungsweise BigFloat-Arithmetik nicht unnötig anwächst. Die Rekursion ist außerdem gut parallelisierbar. Damit eignet sich **FSR** besonders für hohe Präzision, exakte Ganzzahlarithmetik und große strukturierte lineare Systeme.

Zusammenspiel. Die **FTD** liefert die strukturierte Zerlegung $A \approx T_1 T_2$, während die **FSR** die daraus entstehenden Produkte, Inversionen, Schur-Komplement-Schritte und Rücktransformationen rekursiv ausführt. Hier ersetzt die Kombination die allgemeine Operatorauswertung $O(dmn)$ durch $O(p^2)$.

Einbindung in Intex–Merit. Die **FTD/FSR**-Struktur greift an drei Stellen.

Erstens beschleunigt sie die Intex-Phase, weil dort wiederholt Schranken, Schnitte und Schwerpunktbewegungen durch Operationen mit A und A^T berechnet werden.

Zweitens beschleunigt sie die Merit-Politur, weil Funktionswert und Gradient nur aus

$$Ax - b, \quad c - A^T y, \quad b^T y - c^T x$$

bestehen.

Drittens kann sie den **CO** beschleunigen. Das Lösen eines dichten aktiven Systems der Größe n ohne Struktur kostet $O(n^3)$. Besitzt das aktive Teilsystem jedoch dieselbe Toeplitz-, Hankel- oder Faltungsstruktur, reduzieren **FTD/FSR** diesen Schritt auf $O(p^2)$ pro strukturiertem Teilsystem.

Damit bilden Intex, Merit, **CO**, **FTD** und **FSR** keine getrennten Bausteine, sondern eine zusammenhängende Architektur: Intex = geometrische Reduktion, Merit = numerische Politur, **CO** = algebraische Zertifizierung, **FTD/FSR** = strukturierte lineare Algebra.

Komplexität

Bezeichne \mathcal{M}_A den Aufwand einer vollständigen Operatorauswertung mit A und A^T . Dann gilt

$$\mathcal{M}_A = \begin{cases} O(\text{nnz}(A)), & \text{für dünn besetzte Matrizen,} \\ O(mn), & \text{für dichte unstrukturierte Matrizen,} \\ O(p^2), & \text{für } \mathbf{FTD/FSR}\text{-strukturierte Matrizen.} \end{cases}$$

Die Intex-Phase besitzt damit die Ordnung $O(2(\tilde{\alpha}\rho)^2 M_A)$. Die Merit-Politur benötigt bei K akzeptierten Iterationen und B Backtracking-Auswertungen zusätzlich $O((K+B)M_A)$. Für den **CO** gilt ohne Struktur $C = O(Tn^3)$, wenn T aktive Basiskandidaten tatsächlich getestet werden. Da $T \leq \binom{Q}{n}$ für Q Kandidatengleichungen gelten kann, ist der ungezügelte **CO** potenziell kombinatorisch. Das Stufenmodell reduziert Q zunächst stark und aktiviert größere Kandidatenmengen nur bei Bedarf.

Mit strukturierter linearer Algebra ergibt sich stattdessen näherungsweise $C = O(Tp^2)$. Insgesamt lautet die Ordnung des hybriden Verfahrens

$$O(2(\tilde{\alpha}\rho)^2 M_A + (K+B)M_A + C).$$

Der Speicherbedarf neben der Matrix- oder Generatorrepräsentation ist mit $O(m+n)$ im Intex-Merit-Kern linear: Bei dichter Matrixspeicherung ergibt sich insgesamt $O(mn + m + n) = O(mn)$. Bei strukturierter Speicherung hängt der Speicherbedarf von der Generatorbreite ab und liegt näher bei $O(p + m + n)$.

Hardware- vs. Software-Arithmetik. Neben der algorithmischen Komplexität wird die praktische Laufzeit maßgeblich durch die Maschinenebene diktiert. Der Solver zieht einen substanziellen Geschwindigkeitsvorteil aus der Vermeidung von software-emulierter Hochpräzisionsarithmetik (wie Multipräzisions-Datentypen), wo diese nicht zwingend erforderlich ist.

Da das System durch die Vorkonditionierung exzellent balanciert wird, reicht für die allermeisten praktischen Probleme hardware-native 64-Bit-Fließkomma-Arithmetik aus. Dieser konsequente Verzicht auf emulierten Overhead ermöglicht es, Matrix-Vektor-Multiplikationen vektoriell und direkt in der Hardware auszuführen, was die effektive Lösungszeit um ein Vielfaches reduziert.

Folgerungen und Anwendungen

Zweite Lösung auf derselben Zielfläche. Ist x^o eine optimale Lösung, so kann das **LP**

$$\max \{ \|x - x^o\|_1 : c^\top x = c^\top x^o, Ax \leq b, x - x^o \in [-1, 1]^n, x \in {}^v\mathbb{R}_{\geq 0}^n \}$$

eine zweite optimale Lösung bestimmen, sofern die optimale Fläche mehr als einen Punkt enthält. Der duale Vektor y^o kann analog behandelt werden.

Lineare Gleichungssysteme. Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ lässt sich über die Merit-Funktion $\widehat{\Phi}(x) = \|Ax - b\|_2^2$ behandeln. Im regulären Fall führt dies auf die Lösung des Systems, im singulären oder inkonsistenten Fall nur im Kleinste-Quadrate-Sinn. Der Gradient ist $\nabla\Phi(x) = A^\top(Ax - b)$. Zusätzliche Nebenbedingungen wie $x_j \geq 0$ lassen sich durch Projektion oder durch **LP**-Formulierung ergänzen.

Regularität. Die Matrix A ist genau dann regulär, wenn das homogene System $Ax = 0$ nur die Nulllösung besitzt. Dies kann ein **LP** der Form

$$\max\{\|x\|_1 : Ax = 0, x \in [-1, 1]^n\}$$

testen. Ist der optimale Wert null, so ist der Kern trivial.

Inverse Spalten. Für reguläres $A \in {}^v\mathbb{R}^{n \times n}$ kann jede Spalte α_j von A^{-1} durch $A\alpha_j = e_j$ bestimmt werden, wobei e_j der j -te Einheitsvektor ist. Ohne Struktur ist dies ein klassisches lineares Gleichungssystem; mit **FTD/FSR** kann die Struktur von A in der Lösung ausgenutzt werden.

Eigenwertprobleme. Eigenwertgleichungen $Ax = \lambda x$ lassen sich in Nebenbedingungen eines erweiterten Optimierungsproblems überführen. Praktisch interessiert dies dann, wenn sich zusätzliche Nebenbedingungen, Normierungen oder Strukturbedingungen an x und λ stellen. Für allgemeine dichte Matrizen bleiben klassische Spektralverfahren meist geeigneter; bei strukturierter oder nebenbedingter Formulierung kann die Merit-**LP**-Sicht jedoch vorteilhaft sein.

Polynom- und Padé-Approximation. Auch Ausgleichsprobleme der Form

$$y = r + Xc, \quad X^T r = 0$$

lassen sich als lineare oder quadratische Merit-Probleme formulieren. Zusätzliche Nebenbedingungen an die Koeffizienten c können direkt eingebaut werden. Für Padé-Approximationen kann die diskrete Fouriertransformation strukturierte Faltungsanteile liefern, die **FTD/FSR** anschließend verarbeiten.

Konvexe Programme. Für konvexe Programme $\min \{f_1(x) : x \in \mathbb{R}^n, (f_2(x), \dots, f_m(x))^T \leq 0\}$ kann dieselbe Idee auf nichtlineare Residuen übertragen werden. Dann werden die linearen Terme $Ax - b$ durch die Verletzungen $f_k(x)$ ersetzt. Die Grundstruktur bleibt:

$$\text{Zulässigkeit + Dualität oder Optimalitätsbedingung} \longrightarrow \text{Merit-Funktion.}$$

Eine polynomielle Laufzeitaussage hängt hier jedoch zusätzlich von der Auswertbarkeit, Glattheit, Kondition und Struktur der Funktionen f_k ab.

Bewertung

Das Intexverfahren arbeitet geometrisch. Es erzeugt aus relaxierten Polytopen innere Punkte und reduziert den Radius der Relaxation. Das Meritverfahren arbeitet analytisch. Es minimiert eine primal-duale Residualfunktion und verbessert dadurch Zulässigkeit und Dualitätsspalt. Der **CO** arbeitet algebraisch. Er rekonstruiert aus einem guten Näherungspunkt eine zertifizierte aktive Basis. Die **FTD**- und **FSR**-Verfahren arbeiten dagegen strukturell und arithmetisch. Sie ersetzen allgemeine Matrixoperationen durch strukturierte Generator-, Faltungs- und Rekursionsrechnungen.

Damit verbindet das hybride Verfahren drei unterschiedliche Prinzipien und arbeitet im allgemeinen Fall wie ein geometrisch gestütztes primal-duales Verfahren erster Ordnung, das bei strukturierter linearer Algebra deutlich schneller werden kann. Seine Stärke liegt nicht darin, klassische Simplex- oder Innere-Punkte-Verfahren in jedem kleinen Problem zu schlagen. Seine Stärke liegt in der Kombination aus zulässiger geometrischer Annäherung, robuster Residualpolitik, algebraischer Zertifizierung und ausnutzbarer Struktur.

8 Wissenschaftliches Rechnen

Das Folgende setzt Mengenlehre und Nichtstandardanalysis voraus.

Definition: Sei $\varepsilon \in [\tilde{v}, 1 - \tilde{v}]$. Seien nach der Trapezregel $T \uparrow_{z \in A} f(z) \downarrow z := \uparrow_{z \in A} \tilde{2}(f(z) + f(\tilde{z}))(\tilde{z} - z)$ und nach der Mittelpunkregel $M \uparrow_{z \in A} f(z) \downarrow z := \uparrow_{z \in A} f(\tilde{2}(z + \tilde{z}))(\tilde{z} - z)$. Für $j, k \in {}^\omega \mathbb{N}$, $f \in C_\pi^{j+2}$ und die Fourierkoeffizienten $c_k := \tilde{\pi} \uparrow_{-\pi}^\pi f(t) \tilde{\varepsilon}^{kt} \downarrow t$ heißt die Reihe $\uparrow_{k=-\omega}^\omega c_k \varepsilon^{kt}$ Fourierreihe mit evtl. anderen Periodenlängen als $\tilde{\pi}$ (s. [30], S. 358 - 364). Seien $f_n^*(z) = f(\eta_n z)$ die Schwestern zur TR $f(z) \in O(\mathbb{D})$ um 0 auf dem Gebiet $\mathbb{D} \subseteq {}^\omega \mathbb{C}$ mit $m, n \in {}^\omega \mathbb{N}^*$ und $\eta_n^m := \underline{1}^{2^{m/n}}$ sowie $\delta_n^* f = \check{f} - \check{f}_n^*$ die halben Schwesterabstände von f . Seien $s \in {}^\omega \mathbb{Z}^*$, $\mu_s^m := z^{-s} m! / (m - s)!$ und $|s|! := 0$. Auf Ebene der TRn bilden μ und η den μ - η -Kalkül. Δ

Bemerkung: Letzterer erlaubt Integrale und Ableitungen einfach und endlich geschlossen darzustellen (vgl. [22], S. 165 f.). So gilt für die TRn $f(x), g(x) \in {}^\omega \mathbb{R}$ bspw. $\uparrow_0^x \uparrow_0^y g(v) \downarrow v \downarrow y = f(x \mu_2) g(x \mu_{-2})$.

Beispiel: Aus $\text{Re } c \in [\tilde{v}, 1 + \tilde{v}]$, $c \in {}^\omega \mathbb{C}$ und $\varepsilon := \tilde{2}^j$, $j \in {}^\omega \mathbb{N}^*$ folgt $\zeta(n + c) = 2^{jn} \uparrow_{k=1}^n \delta_n^* v_c(\tilde{2}^j u^k)$ für $z \in {}^{1-\tilde{v}} \dot{\mathbb{C}} \subset \mathbb{D}$ (vgl. [23], S. 42) und $v_c(z) := \uparrow_{m=1}^\omega \zeta(m + c) z^m = z \uparrow_{m=1}^\omega \tilde{m}^c z^{-m}$.

Beispiel: Eine Richardson-Extrapolation bestimmt die Digammafunktion ψ und

$$\zeta(\tilde{n}) = \varepsilon^n \tilde{n} \uparrow_{k=1}^n (\psi(\varepsilon u^k \underline{1}^{2\tilde{n}}) - \psi(\varepsilon u^k)) + O(\varepsilon^{\tilde{n}})$$

für $n = 2$ und $\varepsilon = \tilde{2}^{13}$ als $\zeta(3) = 2^{24} \uparrow_{k=1}^2 (\psi(\underline{1} u^k) - \psi(\varepsilon u^k)) + O(10^{-16})$.

Darstellungssatz für Integrale: Die TR (s. u.) $f(z) \in O(\mathbb{D})$ um 0 für $\mathbb{D} \subseteq {}^\omega \mathbb{C}$ ergibt mit $\tilde{m}, n \in {}^\omega \mathbb{N}^*$

$$\uparrow_0^z \dots \uparrow_0^{\tilde{z}} f(\zeta_1) \downarrow \zeta_1 \dots \downarrow \zeta_n = f(z \mu_{-n}). \square$$

Darstellungssatz für Ableitungen: Mit $\tilde{v} \dot{\mathbb{C}} \subset \mathbb{D} \subseteq {}^\omega \mathbb{C}$ ergeben die n -ten Einheitswurzeln, die TR

$$f(z) := f(0) + \uparrow_{m=1}^\omega \tilde{m}!^m f(0) z^m,$$

$\varepsilon := \tilde{2}^j \tilde{r}$, $j \in {}^\omega \mathbb{Z}$, $n = \varepsilon^\sigma \in {}^\omega \mathbb{N}^*$, $u := \varepsilon^{\tilde{n}}$ und der Konvergenzradius $r \in {}^v \mathbb{R}_{>0}$ von f

$${}^n f(0) = 2^{jn} \tilde{n}! \uparrow_{k=1}^n \delta_n^* f(\tilde{2}^j u^k). \square$$

Universeller Mehrschrittsatz: Mit $n \in {}^v \mathbb{N}_{\leq p}$, $k, m, p \in {}^v \mathbb{N}^*$, $\downarrow \tilde{x} \in]0, 1[$, $x \in [a, b] \subseteq {}^\omega \mathbb{R}$, $y : [a, b] \rightarrow {}^\omega \mathbb{R}^q$, $f : [a, b] \times {}^\omega \mathbb{R}^{q \times n} \rightarrow {}^\omega \mathbb{R}^q$, $g_k(\tilde{x}) := g_k(x)$ und $g_0(a) = f(\tilde{a}, y_0, \dots, y_{\tilde{n}})$ ergibt die TR des Anfangswertproblems n -ter Ordnung $\uparrow y(x) = f(x, y(\rightarrow^0 x), \dots, y(\rightarrow^{\tilde{n}} x))$

$$y(\tilde{x})_p = y(x)_p + \downarrow \tilde{x} \pm_{k=1}^p (g_{p-k}(\tilde{x}) \uparrow_{m=k}^p \tilde{m}! \binom{\tilde{m}}{k}) + O((\downarrow \tilde{x})^{\tilde{p}}). \square$$

Auf- und Ableitungssatz für eine Kronreihe (KR): Mit $m \in {}^\omega \mathbb{Z}$, $q = \tilde{\varepsilon}(z - a)$, $a \in \mathbb{D}$ und $j, k \in \mathbb{N}_{<n}$ ergeben modulare Arithmetik (vgl. [16], S. 302 - 311) und die n -ten Einheitswurzeln zur analogen TR:

$${}^m f_{\tilde{n}}(z) := \tilde{n}(q^j)^\top (\delta_{jk} \tilde{\varepsilon} q^m j! / (j - m)!) (\tilde{u}^{jk}) (f(\varepsilon u^k + a)) + R_n^m(z). \square$$

Umkehrsatz für KRn: Für $y \in f(\mathbb{D})$, $y(a) = b$ und $\uparrow y(a) \neq 0$ ergibt der Satz von Bürmann ([32], S. 129 ff.):

$$f_{\tilde{n}}^{-1}(y) := a + \tilde{n} \uparrow_{m=1}^n \tilde{m} \tilde{\varepsilon}^{\tilde{m}} (y - b)^m (\tilde{u}^{\tilde{m}k})^\top (f(\varepsilon u^k + a)^{-m}) + R_n^-(y). \square$$

Bemerkung: Ein hinreichend kleines $\tilde{n}|a - z_0|$ liefert für $y = 0$ eine Nullstelle $z_0 \in {}^\omega \mathbb{C}$ von $f(z) \in {}^\omega \mathbb{C}$. Der vorige Satz ermöglicht implizite Differentialgleichungen für KRn einfach in explizite umzuwandeln.

Ableitungssatz für Fourierreihen: Mit $f \in C_\pi^{m+2}$ (vgl. [30], S. 358 ff.), $m \in {}^\omega \mathbb{N}$, $j \in [-\tilde{n}, n] \cap \mathbb{Z}$, $t \in [-\pi, \pi]$ und $k \in \mathbb{N}_{<\tilde{n}}$ ergibt sich mit der Möglichkeit zur gliedweisen Integration folgendes KRn-Analogon:

$${}^m \check{f}_{\tilde{n}}(t) := \tilde{n}(u^{\tilde{n}jmt})^\top (\delta_{(j+\tilde{n})k} \tilde{j}^m) (\tilde{u}^{jk}) (\check{f}(\tilde{n}\pi k - \pi)) + O(\tilde{n}). \square$$

Folgerung: Die Stützstellen $kr := \tilde{n}\pi k$ des glatten $f(kr)$ liefern mit j wie k interpolierend in $O(\sigma n)$:

$${}^m \check{f}_{\tilde{n}}(t) := \tilde{n}(u^{\tilde{r}jt})^\top (\delta_{jk} \tilde{j}^m) (\tilde{u}^{jk}) (\check{f}(kr)). \square$$

Bemerkung: Die Identität anstatt δ_n^* liefert beliebig genaue Näherungen für die ${}^n f$. Der Fehler für analog definierte m -dimensionale **KRn** mit je $\binom{m+n}{n}$ Ableitungen ist vergleichbar.

Satz (**KRn**-Fixpunktverfahren): Jedes $z \in {}^\omega \mathbb{C}$ eines beliebigen m -Polynoms $p(z) = 0$ mit $m \in [2, n] \cap \mathbb{N}$ für $n := 2^r, r \in {}^v \mathbb{N}^*$ und Koeffizienten aus ${}^v \mathbb{C}$ lässt sich (als Anschub) ebenfalls in $O(\sigma n)$ bestimmen.

Beweis und Algorithmus: Sei $U = (\tilde{u}^{jk})$ mit $j, k \in \mathbb{N}_{<n}, u := \epsilon^{\tilde{n}}, q := \hat{z}$ und $s_k := p(\tilde{z}u^k)$. Eine einfache Transformation erreicht $|q| < \tilde{2}$ für alle Nullstellen ζ von $p(z)$ und $p(0) = 1$. Für $p(z) = \tilde{n}(q^j)^\top U s = \tilde{n} \mu^\top s = 0$ ergibt sich die vereinfachte Iteration $\mu^* = U_1^{-T} \mu U((\delta_{jk} \tilde{u}^j) U^{-1} \mu - (U_{\tilde{n}}^{-T} \mu + \beta s^\top \mu, \beta s^\top \mu, \dots, \beta s^\top \mu)^\top)$. Hierbei sei δ_{jk} das Kronecker-Delta, der Startpunkt $q := \tilde{2}$ und $\beta \in {}^v \mathbb{C}^*$, sodass jeweils $\|\mu^* - \mu\|$ sich ungefähr halbiert und $\mu^\top s = 0$ gilt. Für $m > 2$ bildet Polynomdivision den Schluss. \square

Approximationssatz: Für $x \in {}^\omega \mathbb{R}$ und $m, n \in {}^v \mathbb{N}$ erlauben die ${}^s f(x) \in {}^\omega \mathbb{R}$ wie oben die Interpolante

$$g(x) := \bigoplus_{r=0}^m \lambda_{|x_r, x_r|}(x) ((x_r - x) p_r(x) + (x - x_r) p_r(x)) / (x_r - x) + \bigoplus_{r=0}^m \lambda_{|x_r|}(x) p_r(x)$$

mit $p_r(x) := \bigoplus_{s=0}^n {}^s f(x_r) (x - x_r)^s / s!$ in $O(\sigma m n)$ zu berechnen, wobei ${}^s f(x_r) = {}^s g(x_r)$ für alle $x_r \in {}^\omega \mathbb{R}$ gilt. Im Komplexen ist ${}^\omega \mathbb{R}$ durch ${}^\omega \mathbb{C}$ zu ersetzen und es gelte $x = \gamma(t) \in {}^\omega \mathbb{C}$ für den Weg $\gamma(t)$ mit $t \in {}^\omega \mathbb{R}$. \square

Differentialgleichungssatz: Sei $d(z) \in {}^\omega \mathbb{C}^{n+2}$ Vektor von **KRn** mit $n \in {}^\omega \mathbb{N}$. Die Lösung y_0 des Systems ${}^{\dot{h}} y = \left(\mathbb{C}_0^n {}^m y, 1 \right) d(z) \in {}^\omega \mathbb{C}$ mit / ohne $\left(\mathbb{C}_0^n {}^m y(a) \right)^\top \in {}^\omega \mathbb{C}^{\dot{h}}$ und $a, z \in {}^\omega \mathbb{C}$ lässt sich ebenso in $O(n^3)$ bestimmen. \square

Bemerkung: Werden Funktionswerte von *Kronpunkten* $\epsilon u^m + a$ um den *Kronmittelpunkt* a ausgewertet, wobei $\epsilon = \tilde{2}$ und $n = 64$ gut gewählt sind, und abbrechende **KRn** (evtl. auch Laurent- und Fourierreihen) genutzt, lassen sich sowohl eine Polynomdivision ausführen als auch (zumindest abschnittsweise) analytische, nichtlineare bzw. partielle (Integro-)Differentialgleichungssysteme lösen.

Beispiel: Mit $b = (f(\epsilon u^0 + a), \dots, f(\epsilon u^{\dot{h}} + a), 1)^\top \in {}^\omega \mathbb{C}^{\dot{h}}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $T(z) \in {}^\omega \mathbb{C}^{\dot{h} \times \dot{h}}$ haben gewöhnliche Differentialgleichungen (z. B. in [31]) nur Lösungen, wenn $T(z)b = 0$ gilt.

Reihensatz für Integrale: Für $c \in [0, a], f \in {}^v \mathbb{C}^n$ und $n, \hat{p}, r (= 2^p), t (= 2^v), \hat{v} \in {}^v 2\mathbb{N}^*$ zeigen **KRn**

$$\uparrow_0^a f(w) \downarrow w = \uparrow_0^{\hat{t}a} \bigoplus_{s=1}^{\hat{t}} f(x + s\hat{t}a) \downarrow x = \uparrow_0^1 g(y) \downarrow y = \bigoplus_{\hat{q}=1}^{\hat{r}} \bigoplus_{\hat{m}=0}^{\hat{n}-1} \widetilde{m!} {}^m \hat{g}(\hat{r}\hat{q}) \hat{r}^{\hat{m}} + O\left(\widetilde{n!} {}^n g(\hat{a}c) \hat{r}^{\hat{n}}\right). \square$$

Bemerkungen: **KRn**-Äquivalente können die ${}^m g$ mit $g(y) := af(ay)$ und $a > 0$ ersetzen. Die Transformation $z := \epsilon^{\pm x}$ macht hier unendliche Integralgrenzen endlich. Ein endliches Integral verringert den Betrag des Restglieds hinreichend. Die Mittelpunkregel ist hier vorteilhafter als die Trapezregel.

Beispiel: Mit ${}_{\mp} g(\vartheta) := \tilde{\pi}(1 - \epsilon^2 \sin^2(\tilde{\pi}\vartheta))^{\mp \frac{1}{2}}$ ist das vollständige elliptische Integral I. und II. Art

$$\uparrow_{0\mp}^1 g(\vartheta) \downarrow \vartheta = {}_{\mp} g(\check{1}) + 24 \frac{2}{\mp} g(\check{1}) + 1920 \frac{4}{\mp} g(\check{1}) + O\left(\widetilde{9!} \frac{6}{\mp} g(\check{1})\right).$$

Zweite Euler-Maclaurin-Formel: Für $f(\check{q}) = g(\check{r}\check{q})$ und $k = \hat{a} = \check{r}$ liefert der vorangehende Satz in $O(\sigma n)$

$$\bigoplus_{\check{q}=1}^{\check{r}} f(\check{q}) = \uparrow_{\check{1}}^{\check{k}} f(x) \downarrow x + \bigoplus_{\check{m}=1}^{\check{n}-1} H_m \left({}^m f(\check{k}) - {}^m f(\check{1}) \right) + O\left(H_n \left({}^n f(\check{k}) - {}^n f(\check{1}) \right) \right).$$

Beweis: Für $h(x) = x/\sin x$ und $H_m := \underline{1}^m \widetilde{m!} {}^m h(0) = \widetilde{m!} B_m (2 - 2^m) \rightarrow 2\tilde{\pi}^{-m}$ folgt die Behauptung aus

$$\bigoplus_{\check{q}=1}^{\check{r}} g(\check{r}\check{q}) = \check{r} \uparrow_0^1 g(y) \downarrow y - \bigoplus_{\check{q}=1}^{\check{r}} \bigoplus_{\check{m}=1}^{\check{n}-1} \widetilde{m!} {}^m g(\check{r}\check{q}) + O\left(\widetilde{n!} {}^n g(\hat{a}c) \hat{r}^{\hat{n}}\right)$$

durch Einsetzen und Zusammenfassen der in Abhängigkeit von Partitionen gezählten Fakultäten mit den Bernoulli-Zahlen B_m (vgl. Nichtstandardanalysis) und $B_m = 0, B_0 = 1$ sowie $B_1 = -\tilde{2}$. \square

Erste Euler-Maclaurin-Formel: Vollständige Induktion nach n zeigt ebenso (vgl. [20], S. 193 f.)

$$\bigoplus_{\check{q}=0}^{\check{r}} f(\check{q}) = \uparrow_0^{\check{r}} f(x) \downarrow x + f(\check{r}) + f(0) + \bigoplus_{\check{m}=1}^{\check{n}-1} \widetilde{m!} B_m \left({}^m f(\check{r}) - {}^m f(0) \right) + O\left(\widetilde{n!} B_n \left({}^n f(\check{r}) - {}^n f(0) \right)\right). \square$$

Bemerkung: Ersetze die Ableitungen der Euler-Maclaurin-Formeln auch durch ihre **KRn**-Äquivalente.

Algorithmische Neufundierung: Abspaltung von Linearfaktoren statt blinder Auswertung

Standardmäßige Approximationsalgorithmen operieren oft strukturblind. Sie werten die Zielfunktion an diskreten Stützstellen aus oder berechnen lokale Ableitungen, ohne deren globale Topologie zu hinterfragen. Trifft ein klassischer Algorithmus auf eine Polstelle, interpretiert er diese numerisch schlicht als extrem steilen Anstieg. Das Resultat ist ein prozessualer Zusammenbruch: Lineare Gleichungssysteme werden singular, Rundungsfehler eskalieren unkontrolliert zu NaN-Werten (Not a Number), und das resultierende Polynom verliert seine mathematische Aussagekraft.

Der hier verfolgte Ansatz verlässt diesen rein reaktiven Pfad und implementiert eine **vorgezogene strukturelle Abspaltung** (in Linearfaktoren). Der Berechnungsprozess gliedert sich dabei in drei strikt getrennte Phasen:

1. **Struktur-Scan:** Vor jeglicher Reihenentwicklung sucht ein vorgeschalteter Algorithmus aktiv nach echten Singularitäten und Nullstellen. Durch die rigorose Auswertung des Betrags komplexer Zahlen werden dabei auch Singularitäten auf der imaginären Achse fehlerfrei identifiziert.
2. **Analytische Abspaltung von Linearfaktoren:** Die erkannten algebraischen Strukturen werden direkt aus der Ursprungsfunktion extrahiert. Polstellen werden herausmultipliziert, Nullstellen dividiert. Übrig bleibt eine mathematisch geglättete, analytische Restfunktion, die eine numerische Eskalation vermeidet.
3. **Approximation und Rekonstruktion:** Erst auf diese stabile Restfunktion werden die eigentlichen Approximationswerkzeuge angewendet. Da das Verhalten der Restfunktion meist gutartig ist, genügen für die Näherung deutlich geringere Polynomgrade. Im abschließenden Rekonstruktionsschritt werden die zuvor isolierten algebraischen Pol- und Nullstellen exakt und verlustfrei in das Zähler- beziehungsweise Nennerpolynom des finalen Modells wieder integriert.

Der blinde Fleck der reellen Achse: Komplexe Nah-Singularitäten

Ein eindimensionaler Scan entlang der reellen Achse ist hochgradig effizient, besitzt jedoch einen fundamentalen blinden Fleck: **komplexe Nah-Singularitäten**. Es werde die rationale Funktion $f(z) = \frac{z^2 + \epsilon^2}{z^2 + \delta^2}$ für sehr kleine, reelle Werte von ϵ und δ betrachtet.

Auf der reellen Achse ist diese Funktion stetig, glatt, strikt positiv und vollständig regulär. Ein rein reeller Struktursuchalgorithmus findet keine Anomalien. Dennoch verbergen sich in unmittelbarer Nähe zur reellen Achse rein komplexe Nullstellen bei $\pm i\epsilon$ und Polstellen bei $\pm i\delta$.

Diese verborgenen Pole fungieren als analytische Barrieren. Sie begrenzen den Konvergenzradius klassischer Potenzreihen auf $R = \delta$, was jede globale Approximation jenseits dieses engen Intervalls zum Scheitern verurteilt. Um die Abspaltung von Linearfaktoren wahrhaft robust zu machen, darf die strukturelle Analyse daher nicht auf die mathematische Ideallinie der reellen Achse beschränkt bleiben. Sie muss zwingend zu einem zweidimensionalen *Toleranzschlauch* (Strip) ausgeweitet werden, um auch jene komplexen Singularitäten zu erfassen, deren Einflussgebiet bis tief in den reellen Definitionsbereich hineinragt.

Der Paradigmenwechsel – die methodische Trennung von definierender algebraischer Struktur und analytischem Rest – schützt das System auf fundamentaler Ebene vor numerischer Überanpassung (Overfitting). Die Berechnung vermeidet Singularitäten durch fehleranfällige Oszillationen zu simulieren; stattdessen passt sich das Modell von Grund auf an die wahre, innere Struktur der Funktion an.

ODE-Beispiel: Kronreihe und Faltung vs. Runge–Kutta

Als bewusst schlichtes, aber nichtlineares Referenzproblem diene

$${}^1y(x) = y(x)^2, \quad y(0) = 1.$$

Die exakte Lösung ist

$$y(x) = \tilde{x}^{-1},$$

mit einer Polstelle bei $x = 1$. Damit ist der Konvergenzradius der **TR** um x_0 gleich $R(x_0) = \acute{x}_0$.

Kronreihe als Taylorentwicklung

Für einen Schritt von x_0 nach $x_0 + h$ wird die lokale Reihenentwicklung

$$y(x_0 + s) = \sum_{m=0}^n a_m s^m + O(s^{n+1})$$

verwendet (hier ist $s = x - x_0$). Dann gilt

$$y(x_0 + s) = \sum_{m=0}^n a_m s^m + O(s^{n+1}).$$

Für das Quadrat entsteht das Cauchy-Produkt (Faltung)

$$y(x_0 + s)^2 = \left(\sum_{m=0}^n a_m s^m \right) \left(\sum_{m=0}^n a_m s^m \right) = \sum_{m=0}^{2n} c_m s^m$$

mit

$$c_m := \sum_{j=0}^m a_j a_{m-j}.$$

Koeffizientenvergleich in $y = y^2$ liefert für $m = 0, \dots, n$ die Rekursion

$$c_m a_m = c_m = \sum_{j=0}^m a_j a_{m-j}, \quad a_0 = y(x_0).$$

Damit sind die a_m vollständig durch Faltungen bestimmt und enthalten keine Binomialkoeffizienten.

Faltung per Fast-Fourier-Transformation (FFT) (Kernidee)

Für die diskrete Faltung werden Vektoren eingesetzt. Sei $A = (a_0, \dots, a_n)$. Für eine schnelle Faltung werden Nullpolsterung auf Länge $\tilde{m} \geq \hat{n}$ (typisch $\tilde{m} = 2^{\lceil \log_2(\hat{n}+1) \rceil}$) und die DFT (s. [26], S. 155 - 161) verwendet:

$$\check{A}_k := \sum_{j=0}^{\tilde{m}} A_j u^{jk}, \quad u := \exp(i 2\pi / \tilde{m}), \quad k = 0, \dots, \tilde{m}.$$

Dann gilt für die Faltungskoeffizienten $C = A * A$ komponentenweise

$$\check{C}_k = \check{A}_k^2, \quad C_j = \tilde{m} \sum_{k=0}^{\tilde{m}} \check{C}_k \tilde{u}^{jk}.$$

Die FFT setzt diese Transformationen in $O(m \log m)$ um. Wichtig: Genau hier erweist sich die KR als praktisch, da sich Ableitungen und Produkte vektoriell – und damit FFT-tauglich – behandeln lassen.

Auswertung des Schritts

Ist $A = (a_0, \dots, a_n)$ bestimmt, folgt der Schrittwert aus der Polynomauswertung

$$y(x_0 + h) \approx \sum_{k=0}^n a_k h^k,$$

z. B. per Horner-Schema (nur Multiplikationen/Additionen).

Konkrete Rechnung für $x_0 = 0, h = 0,1, n = 16$

Hier ist die exakte Lösung $y(x) = \tilde{x}$, also

$$a_k = 1 \quad (k \geq 0),$$

denn

$$\tilde{x} = \sum_{k=0}^{\infty} s^k.$$

Damit ergibt sich die n -te Partialsumme

$$y(0,1) \approx \sum_{k=0}^{16} (0,1)^k = \frac{1 - (0,1)^{17}}{1 - 0,1}.$$

Der exakte Wert ist

$$y(0,1) = \frac{1}{0,9} = 1,1\bar{1}$$

und der Restterm beträgt

$$\left| y(0,1) - \sum_{k=0}^{16} (0,1)^k \right| = \frac{(0,1)^{17}}{0,9} \approx 1,1111111111111111 \cdot 10^{-17}.$$

Gegenüberstellung: klassisches Runge–Kutta 4. Ordnung

Für ${}^1y = y^2$ lautet ein RK4-Schritt (s. [26], S. 358) mit $y_0 = y(x_0)$, Schrittweite h :

$$\begin{aligned}u_1 &= y_0^2, \\u_2 &= (y_0 + h\check{u}_1)^2, \\u_3 &= (y_0 + h\check{u}_2)^2, \\u_4 &= (y_0 + hu_3)^2, \\y_1 &= y_0 + \tilde{\delta}h (u_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3 + u_4).\end{aligned}$$

Mit $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0,1$ ergibt sich numerisch

$$y_{\text{RK4}}(0,1) \approx 1,1111104900521944,$$

und damit

$$|y(0,1) - y_{\text{RK4}}(0,1)| \approx 6,21 \cdot 10^{-7}.$$

Fairer Vergleich (Prinzip)

- Genauigkeitsziel: Für hohe Genauigkeiten (z. B. 10^{-16} , 10^{-34}) muss RK4 die Schrittweite stark verkleinern oder die Ordnung erhöhen; andernfalls dominiert der lokale Restterm.
- Kron/Faltung: Ein Schritt lässt sich (bei analytischer Lösung) deutlich größer wählen, solange $h < R(x_0)$ bleibt, wobei primär n (Reihentiefe) und Rechenpräzision die Genauigkeit kontrollieren.
- Laufzeit: RK4 kostet pro Schritt wenige Funktionsauswertungen. Kron/Faltung erfordert pro Schritt viele Koeffizienten (Produkte/Faltungen) plus eine Polynomauswertung zu bestimmen. Ersetzt ein Kron-Schritt viele RK-Schritte und werden die Faltungen FFT-basiert organisiert, entsteht ein Vorteil – insbesondere bei großen n . Ferner wird eine komplette Funktion dargestellt.

Bemerkung zur „Weiterdifferenzierbarkeit“

Bei analytischen rechten Seiten führt die Reihenmethode systematisch zu hohen Ableitungsordnungen, weil

$${}^k y(x_0) = k! a_k$$

und a_k durch Faltungen/Kompositionen erzeugt werden. Das ist konzeptionell näher an „Differenzieren durch Rechnen“ (Vektorrechnung/FFT) als an Quadratur mit festem Knotenschema.

9 Theoretische Informatik

Das Folgende setzt die Mengenlehre voraus und beantwortet für $k, m, n \in {}^v\mathbb{N}^*$ die Fragen: Wie lassen sich $n = \epsilon^\sigma \leq k^m$ im Stellenwertsystem zur Basis k kodierte Werte in $O(1)$ sortieren? Wie schnell sortiert deterministische Parallelisierung praxisnäher Arbitrary-Precision-Zahlen? Wie lassen sich zwei Matrizen $\in {}^v\mathbb{R}^{n \times n}$ in $O(\sigma)$ multiplizieren? Wie lässt sich das Minimal- bzw. Maximalgerüst eines Graphen mit n Knoten in $O(\sigma)$ berechnen? Was ist die Antwort auf das Halteproblem? Warum gilt $P = NP$?

Sei der Speicher teilweise in Form eines Binomial-Baumes der Ordnung k mit k^m Speicherplätzen organisiert, wobei $k^m = 2^h$ mit $h \in {}^v\mathbb{N}$ gelte. Jeder Speicherplatz sei in der Lage einen zu sortierenden Wert komplett aufzunehmen und jeder Kante entspreche eine Datenleitung. Ein fortlaufend mehrfachen Werten angehängter Index bildet zusammen mit dem alten Wert den neuen. Jeder j -te Zwischenknoten korrespondiert hierarchisch mit der j -ten Stelle zur Basis k des zu sortierenden Wertes.

Speichern die Blätter statt der Werte deren Adressen (in einem Schritt), erlaubt ein weiterer sie sortiert in die Wurzel zurückzuholen und sie maximal so weit in den Baum zurückzuschieben, bis sie sich trennen. Geht ein Wert durch einen Zwischenknoten, setzt dieser sein Bit auf 1, aber auf 0, falls der Zwischenknoten keinen auszulesenden Nachfolger hat. Die Sortierreihenfolge bestimmt den ersten Wert.

Die nachfolgende Architektur mit autonomen Speichereinheiten verfügt über einfache rechnerische Möglichkeiten. Zusammengeschaltete verteilte Rechner vermögen sie zu simulieren. Die Komplexität erhöht sich durch Einsortieren eines zusätzlichen Wertes um $O(\sigma)$, da dies einer binären Suche entspricht. Sie ist antiproportional zur Anzahl der Baumknoten im Speicher. Das Verwenden von $d \in {}^v\mathbb{N}^*$ Datenleitungen verringert sie um den Faktor \bar{d} , die Belegung des g -fachen eines Speicherplatzes, erhöht sie um den Faktor g .

Enthält der Speicher keinen Binomial-Baum der Ordnung k , erhöht sie sich um den Faktor k^n , weil jeder Zwischenknoten zu einem Wert zu lesen ist. Ein anderweitiges Nutzen der ersten k^p Speicherplätze mit $p \in {}^v\mathbb{N}$ erfordert ein Durchsuchen aller Zwischenknoten der p -ten Stufe. Die Komplexität erhöht sich bei gut gefülltem Speicher marginal, andernfalls um den Worst-Case-Faktor $O(k^p)$.

Die zu multiplizierenden Matrizen sind so quadratisch je n -fach in einem Speicherwürfel abzulegen, dass jede Speichereinheit zwei Werte multipliziert und jeder Eintrag der Produktmatrix als Summe mit n Summanden in $O(\sigma)$ bestimmt wird (Vektorrechner). Matrixmultiplikation lässt sich auch über adressierte schwärmende Einträge realisieren. Tensorprodukte lassen sich effizient durch n -Speicherwürfel abbilden, die durch entsprechende Datenleitungen im dreidimensionalen Raum verbleiben.

Der optimale Sortieralgorithmus *Bitsort* sortiert stabil mit der Zeitkomplexität $O(n)$ und benötigt $O(n)$ zusätzlichen Speicherplatz. Voraussetzungen: Je zwei Werte liegen als Bitfolge vor, lassen sich in $O(1)$ vergleichen und ebenso deren sämtliche Bits abarbeiten. Ferner sei der Speicher teilweise als Binärbaum realisiert und der Weg von Wurzel bis Blatt kann ebenfalls in $O(1)$ durchlaufen werden.

Ist $p \in {}^v\mathbb{N}^*$ die Anzahl der parallelen Schritte für paralleles Bitsort, so ist die Zeitkomplexität $O(\bar{p}n)$. Jedes Einfügen in den stets sortierten Baum bzw. Ausgeben eines Wertes hat die Zeitkomplexität $O(1)$. Der Speicher sei mit folgender Intelligenz versehen: Jeder Baumknoten speichert den ihn erreichenden Wert selbständig und kann ihn an den nächsten Baumknoten weitergeben, wenn er schon besucht wurde, bzw. andernfalls seine Adresse an die Zentraleinheit zurückgeben. Der Wurzel entspricht kein Bitwert.

Begonnen wird bei dem höchstwertigen Bit eines Wertes. Jedes seiner nacheinander abgearbeiteten Bits bestimmt den nächsten Knoten innerhalb des Binärbaumes. Wurden alle Bits abgearbeitet oder ergibt sich ein Unterschied zum verglichenen Bit und wurde der zugehörige Knoten noch nicht besucht, speichert der folgende Knoten ggf. die nicht im Baum liegende Adresse der restlichen Bitkette des Wertes bzw. die Anzahl der Werte für diesen Knoten bei unerheblicher Reihenfolge gleicher Werte.

Die Zeitkomplexität aller Verfahren, die Werte der Bitlänge $b = qa \in {}^v\mathbb{N}^*$ mit Adresslänge $a \in {}^v\mathbb{N}^*$ sortieren, erhöht sich pro Wert von $O(1)$ auf $O(q)$. Ist r der Durchschnittswert von q , ist in der Zeitkomplexität des Sortierverfahrens mindestens ein $O(n)$ durch $O(rn)$ zu ersetzen. Ist $s \in {}^v\mathbb{N}^*$ die durchschnittliche Anzahl der verschiedenen (!) Werte, die in einem Bucket nach Sortierung bis Bitlänge a landen und deren Bitlänge größer als a ist, so beträgt die Zeitkomplexität des Verfahrens $O((\epsilon s + r)n)$.

Dabei werden die erwähnten Werte eines Buckets pro Bucket in einem AVL-Baum abgelegt oder in einem B-Baum bei Ablage in einem zum Hauptspeicher relativ langsamen externen Speicher. Dort wird jeweils nur mit dem signifikanten Teilwert der Adresslänge eines Wertes gearbeitet. Der Verzicht auf vollständig sortierte Werte nach jedem Abarbeiten eines Wertes reduziert die komplette Sortierung durch Verwendung von zwei Hauptspeicherbereichen zeitlich auf $O(m)$.

Der zweite Hauptspeicherbereich wird nach jedem Durchlauf gelöscht, um für den nächsten Durchlauf zur Verfügung zu stehen, bis ein Bucket abgearbeitet ist. In den ersten Hauptspeicherbereich werden stets nur die Adressen in der aktuellen Sortierreihenfolge zurückgeschrieben, bevor die Werte mit gleichem soeben abgearbeitetem Teilwert weiter sortiert werden. Für den schnellen Zugriff auf jeden Teilwert ist jeder Wert zusammenhängend im Speicher abzulegen.

Die Verwendung des $O(m)$ -Verfahrens für die Stammdaten und des $O((\epsilon s + r)n)$ -Verfahrens für die Bewegungsdaten kombiniert beide gut. Damit lassen sich insbesondere schnell Tabellenindizes anlegen. Bei umfangreichen Tabellen macht es einen deutlichen Unterschied, ob ein Index in $O(m)$ statt in $O(r\sigma n)$ angelegt wird und sich dann ein Wert durchschnittlich in $O(\epsilon s + r)$ statt in $O(\sigma + r)$ oder schlechter suchen lässt. Sortieren durch Mischen sortierter Listen ist ebenfalls in $O(m)$ möglich.

Diskussion von Bitsort: Es ist unter den angegebenen Voraussetzungen optimal sowie für die parallele Programmierung, den schnellen laufenden Aufbau von Tabellenindizes in Datenbanken und die Suche darin gut geeignet. Seine Hardwareimplementierung ist eher ungewöhnlich. Während es noch eher Theorie als Praxis ist, verhält es sich bei dem nachfolgenden Verfahren eher umgekehrt.

Square Sort: In der computergestützten Nichtstandardmathematik stoßen traditionelle Sortierparadigmen an physikalische Grenzen. Die Verarbeitung hochkomplexer, zeigerbasierter Datentypen mit extremer Präzision wird nicht primär durch die Anzahl der mathematischen Vergleiche limitiert, sondern durch Speicherbandbreite, Latenzen bei der Pointer-Dereferenzierung und den Overhead der dynamischen Speicherverwaltung. Seine Zeitkomplexität ist $O(N \log N)$, die des Speichers ist $O(N)$.

Es vereint ein statisches Speichermanagement mit einem asymmetrischen Work-Stealing-Scheduling und übertrifft klassische generische Verfahren (wie Timsort oder herkömmliche parallele MergeSort-Implementierungen) bei komplexen Datentypen deutlich, insbesondere bei Pseudozufallszahlen. Die genauen Laufzeiten und Leistungsnachweise finden sich weiter unten. Eine interne Portierung nach C++ erbrachte vergleichbare Ergebnisse.

Klassische Merge-Ansätze skalieren im unteren Baum exzellent, zwingen die Hardware im finalen Verschmelzungsschritt jedoch in einen Single-Thread-Flaschenhals. Square Sort nutzt stattdessen einen parallelen Divide-and-Conquer-Merge. Durch die strategische Suche nach Medianen und die binäre Verortung in den Teilvektoren wird der verbleibende Lösungsraum kontinuierlich partitioniert. Jeder asymmetrische Sub-Task wird dynamisch auf freie Prozessorkerne verteilt.

Die Überwindung der durch das Amdahlsche Gesetz beschriebenen Limitierungen erlaubt ein hybrides Chunking für radikale Cache-Lokalität. Um die teuren Hauptspeicherzugriffe bei der Auswertung von Heap-Referenzen zu minimieren, delegiert Square Sort die Basis-Ebene an einen In-Place-Algorithmus. Die Datenblöcke werden so dimensioniert, dass sie im kernexklusiven L1/L2-Cache der CPU verbleiben. Dies eliminiert das "Cache-Thrashing", das bei traditionellen Bottom-up-Verfahren unweigerlich auftritt.

Während andere Algorithmen den Garbage Collector (GC) bei Millionen von Arbitrary-Precision-Zahlen unter massiven Druck setzen, erlaubt Square Sort eine hohe Ressourceneffizienz und einen Zero-GC-Overhead durch statisches Speichermanagement. Der temporale Arbeitspuffer beträgt $O(N)$. Alternierende Vertauschungen der Speicherzeiger auf jeder Rekursionsebene ersparen zusätzliche Speicheranforderungen und garantieren eine lineare, deterministische Ausfallsicherheit ohne Allokationsspitzen.

Diskussion von Square Sort: Es ist kein generischer Allrounder für primitive Datentypen, sondern ein präzises mathematisches Instrument. Es opfert die SIMD-Vektorisierbarkeit nativer Maschinenzahlen zugunsten einer überlegenen, ausfallsicheren und massiv parallelen Skalierbarkeit bei den rechenintensiven, eindimensionalen Strukturen der Nichtstandardmathematik, die sich noch etablieren muss. Hierfür bildet Square Sort eine spezialisierte, hochparallele Sortierarchitektur.

Tabelle 1: Laufzeit- und Allokationen auf AMD EPYC™ 9645 (24 Kerne, 128 GB DDR5):
 T_t (Timsort) im Vergleich zu T_s (Square Sort) bei sortierten Daten mit Fenster 32
 und einer Perturbationsrate von 10 % (256-Bit BigInt, 24 Threads)

$n \times 10^5$	T_t (ms)	T_s (ms)	Quotient	A_t (MB)	A_s (MB)	Quotient
1	4,29	0,95	4,51	1,26	0,06	20,08
4	16,36	2,25	7,27	5,05	0,10	50,89
16	64,51	11,56	5,58	20,23	0,15	139,34
64	271,74	46,83	5,80	80,90	0,30	267,73
256	4250,16	377,37	11,26	323,60	0,87	371,40
1024	18984,41	1438,08	13,20	1294,67	3,08	419,73

Die Tabelle macht die idealisierte Annahme der Landau-Notation $O(N^2N)$ zunichte. Deren vermeintlich invarianter Proportionalitätsfaktor C steigt bei Timsort ab der L3-Cache-Schwelle ($N = 12,8 \times 10^6$) deutlich an. Unvorhersehbare Zeigerzugriffe übersättigen den L3-Cache, wodurch C durch massive RAM-Latenzen sprunghaft eskaliert. Square Sort hält C durch strikte Lokalität stabil: Damit wird reale Skalierbarkeit nicht durch asymptotische Mathematik, sondern durch physikalisches Speichermanagement bestimmt.

Sei $n \in \mathbb{N}^*$ die Anzahl der Knoten eines endlichen schlichten zusammenhängenden Graphen. (Ist er nicht schlicht, lässt ein Aussortieren in $O(n)$ nur die kleinste parallele Kante und keine Schlingen zu. Ist er nicht zusammenhängend, werden in $O(n)$ alle isolierten Knoten entfernt.) Bei Ausschluss negativer Gewichte benötigt der Algorithmus von Dijkstra $O(n)$ Schritte für jeden minimalen Weg in dem Graphen, da Sortieren sowie paralleles Addieren und Vergleichen in $O(1)$ möglich ist.

Dessen Minimal- oder Maximalgerüst lässt sich in $O(\sigma n)$ oder gar in $O(\sigma)$ berechnen: Die Kanten eines Knotens lassen sich parallel in $O(n)$ bzw. $O(1)$ sortieren. Seien alle Kanten zu Beginn weiß gefärbt. Jeder Knoten hängt die kleinere und dann die größere Zahl der beteiligten Knoten der Kante mit dem kleinsten Gewicht aller weiß gefärbten Kanten, die von ihm ausgehen, an dieses Bit für Bit als Wert an. Er speichert den kleinsten Wert, der ihn erreicht. Dies ist in $O(n)$ bzw. $O(1)$ möglich.

Das Schwarzfärben der Kanten zwischen jeweils zwei Knoten desselben Minimalgerüsts benötigt maximal die gleiche Zeit. Jeder Knoten hat dann einen nächsten Nachbarknoten. Ein Fortfahren mit den weiß gefärbten Kanten in $O(\sigma)$ Schritten kann den kleinsten Wert eines Minimalgerüsts in $O(n)$ bzw. $O(1)$ bestimmen, bis das gesamte Minimalgerüst in $O(\sigma n)$ bzw. $O(\sigma)$ entstanden ist. Für ein Maximalgerüst werden alle Kantengewichte von einer hinreichend großen Konstanten subtrahiert.

Haltesatz: Um ein festes r_m der Zahl $0,r_1r_2\dots r_m$ zu erreichen, hält ein Programm für beliebige (Pseudo-) Zufallszahlen $r_j \in \mathbb{N}$ mit $k \in \mathbb{N}^*$ Stellen und Basis $p := 2^k$ in $m \in \mathbb{N}^*$ Schritten mit der Wahrscheinlichkeit \tilde{p} .

Beweis: Dies ist ein optimales Ergebnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung (vgl. [16], S. 10 - 40).□

Bemerkung: Zufall ist unentscheidbar. Damit existieren Programme, die mit beliebiger Wahrscheinlichkeit halten, und es folgen die Gödelschen Unvollständigkeitssätze. Der Gödelsatz „Ich bin nicht beweisbar.“ ist insofern sophistisch, als er das Scheinargument *Petitio Principii ex negativo* aufweist. Zum Lösen des Halteproblems ist ein Selbstbezug unsinnig, der ein Halten gleichzeitig gebietet und verbietet. Die Selbstreferenz macht das Diagonalargument für das Halteproblem unzulässig.

Satz: Ist \mathcal{L} die Menge aller (Typ-0-) Sprachen L_k aus endlichen Wörtern mit Maximallänge ν für mittendliches $|\mathcal{L}| = 2^{(\nu-1)/\nu}$ (unter Anwendung der GR) und $k \in \{1, \dots, |\mathcal{L}|\}$, gilt $P = NP = \mathcal{L}$.

Beweis: Da sich jede deterministische Turingmaschine auch als nichtdeterministisch auffassen lässt (vgl. [12], S. 162, 318 und 361 f.), gilt $P \subseteq NP$. Es enthält P alle linearen Sprachen L_k und NP nur solche.□

10 Theoretische Physik

Das Folgende setzt das Wissenschaftliche Rechnen voraus.

Casimir-Effekt

Die korrigierte Herleitung des Casimir-Effekts (die physikalische Realität)

Das physikalische Setup besteht aus zwei idealisiert leitenden Platten im Abstand d . Gesucht wird nicht die absolute Vakuumenergie, sondern die Energiedifferenz zwischen dem Vakuum mit Platten und der entsprechenden Referenz ohne Platten. Im Innenraum werden die longitudinalen Moden durch die Randbedingungen diskretisiert; außerhalb beziehungsweise in der Referenz treten die entsprechenden kontinuierlichen Moden auf.

Die hyperreelle Vakuumenergie und die Plasmafrequenz

Im diskretisierten Nichtstandardraum laufen die Eigenfrequenzen nicht in ein unbestimmtes Unendliches, sondern bis zu einer exakt angegebenen mittendlichen Maximalfrequenz ω .

Reale Platten sind jedoch keine perfekten Spiegel bis in beliebig hohe Frequenzen. Oberhalb ihrer charakteristischen Material- beziehungsweise Plasmafrequenz werden sie zunehmend transparent. Die physikalisch angemessene Zielfunktion enthält daher einen Dämpfungsfaktor $g(x)$, der für kleine Frequenzen näherungsweise 1 ist und am oberen mittendlichen Rand verschwindet:

$$g(0) = 1, \quad g(\omega) = 0.$$

Für eine glatte Abschneidefunktion wird zusätzlich angenommen, dass auch die relevanten Ableitungen am oberen Rand verschwinden. Schematisch lautet der longitudinale Summenkern dann

$$E_{\text{innen}} \propto \sum_{n=1}^{\omega} n^3 g(n).$$

Diese Summe ist im hyperreellen Raum keine mystische negative Größe, sondern eine exakt definierte hyperendliche Summe. Der finite Casimir-Anteil entsteht erst durch die strukturierte Abspaltung der gemeinsamen Hintergrundanteile.

Strukturelle Deflation durch Euler-Maclaurin

Zur Analyse wird die erste Euler-Maclaurin-Formel in ihrer hyperreellen Erweiterung verwendet. Sie lautet:

$$\sum_{\check{q}=0}^{\check{r}} f(\check{q}) = \int_0^{\check{r}} f(x) \downarrow x + \check{f}(\check{r}) + \check{f}(0) + \sum_{m=1}^{\check{n}-1} \widetilde{m!} B_m \left(\check{m} f(\check{r}) - \check{m} f(0) \right) + \mathcal{O} \left(\widetilde{n!} B_n \left(\check{n} f(\check{r}) - \check{n} f(0) \right) \right).$$

Wird

$$f(x) = x^3 g(x)$$

eingesetzt, trennen sich die relevanten Beiträge in Integralterm, oberen Rand und unteren Rand.

Integral: Der Integralterm

$$\int_0^{\omega} x^3 g(x) \downarrow x$$

liefert den dominanten hyperreellen Hintergrundanteil. Er gehört zum gemeinsamen Vakuumkern und ist für sich allein nicht die messbare Casimir-Energie.

Oberer Rand bei ω : Da reale Platten bei hinreichend hohen Frequenzen transparent werden, wird die Abschneidefunktion so gewählt, dass am oberen Rand

$${}^1 f(\omega) = 0, \quad {}^2 f(\omega) = 0, \quad {}^3 f(\omega) = 0$$

gilt. Zusätzlich ist

$$f(\omega) = 0.$$

Damit verschwinden die relevanten Euler-Maclaurin-Randterme am oberen Rand.

Unterer Rand bei 0: Am unteren Rand gilt wegen $g(0) = 1$

$$f(0) = 0, \quad {}^1f(0) = 0, \quad {}^2f(0) = 0.$$

Die dritte Ableitung bleibt jedoch erhalten:

$${}^3f(0) = 6.$$

Der finite reguläre Beitrag entsteht daher aus dem Bernoulli-Term vierter Ordnung:

$$R_{\text{konstant}} = \widetilde{4!} B_4 \left({}^3f(\omega) - {}^3f(0) \right).$$

Mit

$$B_4 = -\widetilde{30}, \quad {}^3f(\omega) = 0, \quad {}^3f(0) = 6$$

folgt

$$R_{\text{konstant}} = \widetilde{4!} \cdot (-\widetilde{30}) \cdot (0 - 6).$$

Die longitudinale Summe deflatiert somit in einen dominanten hyperreellen Hintergrundanteil und ein positives, singularitätenfreies Restglied:

$$R_{\text{konstant}} = \widetilde{120}.$$

Entscheidend ist: Nicht die hyperendliche Summe selbst ist gleich $\widetilde{120}$. Vielmehr ist $\widetilde{120}$ der reguläre Rest, der nach Abspaltung der gemeinsamen Hintergrundstruktur übrig bleibt.

Das Außenraum-Integral als Referenz

Außerhalb der Platten beziehungsweise in der Referenzgeometrie ist das Modenspektrum kontinuierlich. Die Energiedichte wird dort durch das entsprechende Nichtstandardintegral beschrieben.

Da dasselbe Vakuum und derselbe physikalische Hochfrequenz-Cutoff verwendet werden, entsteht derselbe dominante hyperreelle Pol wie im Innenraum. Dieser Anteil beschreibt die gemeinsame Hintergrundenergie und ist nicht direkt messbar.

Schematisch gilt daher

$$E_{\text{innen}} = P_{\text{innen}}(\omega, d) + R_{\text{konstant}},$$

$$E_{\text{außen}} = P_{\text{außen}}(\omega, d).$$

Bei konsistenter Regularisierung stimmen die gemeinsamen divergenten Anteile überein:

$$P_{\text{innen}}(\omega, d) = P_{\text{außen}}(\omega, d).$$

Transversale Integration und das physikalische Vorzeichen

Die longitudinale Konstante

$$R_{\text{konstant}} = \widetilde{120}$$

ist positiv. Daraus folgt jedoch noch nicht das Vorzeichen der physikalischen Casimir-Energie.

Im realen dreidimensionalen System müssen zusätzlich die kontinuierlichen transversalen Impulse k_{\perp} parallel zu den Platten integriert werden. Erst diese Phasenraumintegration liefert den physikalischen Vorfaktor der Modendifferenz.

Schematisch erzeugt die transversale Integration einen negativen geometrischen Faktor vor dem regulären longitudinalen Rest. In der üblichen Normierung ergibt sich daraus

$$\frac{\Delta E}{A} = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 d^3}.$$

Das negative Vorzeichen entsteht also nicht dadurch, dass die longitudinale Summe negativ wäre. Es entsteht durch die vollständige dreidimensionale Modenrechnung, insbesondere durch die transversale Phasenraumintegration und die anschließende Subtraktion der Referenzgeometrie.

Exakte algebraische Auslöschung der Hintergrundanteile

Die physikalisch messbare Casimir-Energie ist die Differenz zwischen Innenraum und Referenzraum:

$$\Delta E = E_{\text{innen}} - E_{\text{außen}}.$$

Das Einsetzen der deflatierten Ausdrücke liefert schematisch

$$\Delta E \propto (P_{\text{innen}} + R_{\text{konstant}}) - P_{\text{außen}}.$$

Da beide Rechnungen dasselbe Vakuum, denselben Cutoff und dieselbe Regularisierung verwenden, heben sich die gemeinsamen hyperreellen Pole exakt auf:

$$P_{\text{innen}} - P_{\text{außen}} = 0.$$

Übrig bleibt nur der finite reguläre Rest, multipliziert mit dem physikalischen geometrischen Vorfaktor:

$$\Delta E \propto -\widetilde{120}.$$

In vollständiger physikalischer Normierung lautet das Ergebnis pro Flächeneinheit

$$\frac{\Delta E}{A} = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 d^3}.$$

Die zugehörige Kraft pro Flächeneinheit ist

$$\frac{F}{A} = -\frac{\downarrow}{\downarrow d} \left(\frac{\Delta E}{A} \right) = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 d^4}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet: Die Platten ziehen sich an.

Fazit der Herleitung

Der Casimir-Effekt entsteht nicht, weil

$$+\sum_{n=1}^{\omega} n^3 = -\widetilde{120}$$

wäre. Diese Aussage ist im Nichtstandardraum falsch.

Die hyperendliche Vakuumsomme bleibt positiv und exakt bestimmt. Der entscheidende Punkt ist die strukturierte Deflation:

hyperreeller Hintergrund + regulärer Rest.

Für den longitudinalen kubischen Summenkern liefert der untere Rand der Euler-Maclaurin-Formel bei physikalischem Hochfrequenz-Cutoff den positiven regulären Rest

$$R_{\text{konstant}} = \widetilde{120}.$$

Das physikalisch negative Vorzeichen der Casimir-Energie entsteht anschließend nicht aus einer negativen Summe, sondern aus der vollständigen dreidimensionalen Modendifferenz:

$$\frac{\Delta E}{A} = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 d^3}.$$

Reale Materialien erzwingen diese saubere Sichtweise zusätzlich, weil sie bei sehr hohen Frequenzen transparent werden. Die Nichtstandardanalysis macht dadurch sichtbar, was in der üblichen Regularisierung oft verdeckt bleibt: Die gewaltigen hyperreellen Hintergrundanteile werden nicht willkürlich verworfen, sondern bei gleicher physikalischer Regularisierung exakt gegeneinander bilanziert. Messbar bleibt nur der finite, abstandsabhängige Rest der veränderten Modenstruktur.

Elektronen-Selbstenergie

Eine nichtstandardanalytische Herleitung der Elektronen-Selbstenergie (die physikalische Interpretation)

In der Quantenelektrodynamik (QED) trägt die Wechselwirkung eines Elektrons mit seinen eigenen virtuellen Photonen zu seiner Selbstenergie bei. In der perturbativen QED enthält dieser Beitrag divergente Terme. Die etablierte Physik behandelt diese Terme durch Renormierung: Die nackten Parameter der Theorie werden durch eine Regularisierungs- und Renormierungsvorschrift mit den endlichen, experimentell gemessenen Größen verknüpft.

In der vorliegenden nichtstandardanalytischen Formulierung besteht das Ziel nicht darin, eine undefinierte Unendlichkeit einzuführen. Stattdessen wird der divergente Beitrag als exakt angegebener hyperreeller Pol dargestellt, der anschließend vom endlichen regulären Rest getrennt wird.

Die hyperreelle Impulssumme und der physikalische Cut-off

Das Elektron wird hier nicht als Objekt in einem uneingeschränkten Kontinuum behandelt, sondern in einem diskretisierten Nichtstandardraum, dessen Impulse bis zu einem exakt angegebenen mittendlichen Maximalimpuls ω reichen. Eine solche Skala kann als physikalischer oder effektiver Cut-off interpretiert werden, etwa in der Nähe der Planck-Skala; diese Deutung ist jedoch eine zusätzliche Modellannahme.

Die Wechselwirkung des Elektrons mit Vakuumfluktuationen wird durch eine Summe über virtuelle Impulse p beschrieben. Um auszudrücken, dass das Modell nur bis zu seiner effektiven Auflösungsskala belastbar ist, wird der Summand mit einer glatten Cut-off-Funktion beziehungsweise einem Dämpfungsfaktor $g(p)$ multipliziert. Für niedrige Impulse ist dieser Faktor näherungsweise 1; am oberen mittendlichen Rand verschwindet er zusammen mit den relevanten Ableitungen:

$$g(0) = 1, \quad g(\omega) = 0.$$

Der dominante Kern der Massenrenormierung verhält sich für große Impulse schematisch wie \tilde{p} . Damit hat die hyperendliche Modellsumme die Form

$$E_{\text{self}} \propto \sum_{p=1}^{\omega} \tilde{p} g(p).$$

Im Standardkontinuum besitzt dieser Ausdruck logarithmisches Wachstum. In der hyperreellen Fassung ist er dagegen eine exakt definierte hyperendliche Größe: sehr groß, aber nicht unbestimmt.

Strukturelle Deflation durch Euler-Maclaurin

Um den endlichen regulären Anteil zu isolieren, wird die Zielfunktion

$$f(x) = \tilde{x}g(x)$$

durch die Euler-Maclaurin-Formel deflatiert. Da der Kern bei $x = 0$ einen Pol besitzt, wird die Summe von 1 statt von 0 aus gebildet. Dies ergibt exakt

$$\sum_{\check{q}=1}^{\check{r}} f(\check{q}) = \uparrow_1^{\check{r}} f(x) \downarrow x + \check{f}(\check{r}) + \check{f}(1) + \sum_{\check{m}=1}^{\check{r}-1} \widetilde{m!} B_m \left(\check{m} f(\check{r}) - \check{m} f(1) \right) + \mathcal{O} \left(\widetilde{n!} B_n \left(\check{n} f(\check{r}) - \check{n} f(1) \right) \right).$$

Hier sind B_m die Bernoulli-Zahlen, und \mathcal{R} bezeichnet das entsprechende Restglied.

Integral: der hyperreelle Pol Der Integralterm

$$P_{\text{self}} = \uparrow_1^{\omega} \tilde{x}g(x) \downarrow x$$

enthält den dominanten hyperreellen Hintergrundbeitrag. In der einfachsten ungedämpften Näherung ist er proportional zu ${}_{\epsilon}\omega$, und ist daher der nichtstandardanalytische Repräsentant der üblichen logarithmischen Divergenz. Für sich allein ist dieser Pol jedoch keine direkt messbare Masse.

Randwerte bei ω Da die Cut-off-Funktion das Spektrum am oberen Rand unterdrückt, verschwinden dort die relevanten Euler-Maclaurin-Randterme:

$$f(\omega) = 0, \quad {}^1 f(\omega) = 0, \quad {}^2 f(\omega) = 0, \quad \dots$$

Randwerte bei 1: der reguläre Rest Der untere Rand bei $x = 1$ vermeidet die Singularität bei $x = 0$ und liefert die endlichen Randbeiträge. Diese Terme hängen von der gewählten Cut-off-Funktion und von der gewählten Renormierungsbedingung ab. Sie bilden ein wohldefiniertes, endliches und singularitätenfreies Restglied:

$$R_{\text{mass}} = \check{f}(1) - \sum_{n \geq 1} \widetilde{m!} B_m^n f(1) + \mathcal{R}_{\text{finite}}.$$

Damit wird die Selbstenergie algebraisch zerlegt in

$$E_{\text{self}} = P_{\text{self}} + R_{\text{mass}}.$$

Der erste Term ist der hyperreelle Pol; der zweite Term ist der endliche reguläre Beitrag, nachdem die gemeinsame divergente Struktur abgespalten wurde.

Die nackte Masse als Gegenterm

In der Standard-QED ist die nackte Masse m_0 keine unabhängig beobachtbare Masse. Sie ist ein Parameter der regularisierten Theorie. Ihre Aufgabe besteht darin, den divergenten Anteil der Selbstenergie aufzunehmen, so dass die gemessene Masse endlich bleibt.

In der vorliegenden nichtstandardanalytischen Interpretation wird diese nackte Masse durch einen hyperreellen Gegenterm dargestellt. Sie ist keine beliebige mystische Unendlichkeit, sondern ein präzise angegebener Polbeitrag, der durch dieselbe Cut-off-Struktur festgelegt ist:

$$m_0 = P_{\text{bare}} + R_{\text{bare}}.$$

Die Renormierungsbedingung verlangt, dass der Pol in der nackten Masse den Pol der Selbstenergie aufhebt:

$$P_{\text{bare}} = -P_{\text{self}}.$$

Diese Gleichung ist kein zusätzliches physikalisches Kraftgesetz. Sie ist die algebraische Aussage, dass die regularisierte Theorie auf die beobachtete Elektronenmasse kalibriert wird.

Exakte algebraische Auslöschung und die physikalische Masse

Die physikalische Elektronenmasse ergibt sich aus der nackten Masse plus der Selbstenergiekorrektur:

$$m_{\text{phys}} = m_0 + E_{\text{self}}.$$

Das Einsetzen der deflatierten Größen liefert schematisch

$$m_{\text{phys}} = (P_{\text{bare}} + R_{\text{bare}}) + (P_{\text{self}} + R_{\text{mass}}).$$

Mit der Aufhebungsbedingung

$$P_{\text{bare}} = -P_{\text{self}},$$

löschen sich die hyperreellen Pole exakt aus:

$$m_{\text{phys}} = (-P_{\text{self}}) + P_{\text{self}} + R_{\text{bare}} + R_{\text{mass}}.$$

Also gilt

$$m_{\text{phys}} = R_{\text{bare}} + R_{\text{mass}}.$$

Die messbare Elektronenmasse ist somit nicht der hyperreelle Pol selbst, sondern der endliche Rest, der durch die Renormierungsbedingung festgelegt wird.

Interpretation

Diese nichtstandardanalytische Formulierung ersetzt die informelle Sprache divergenter Unendlichkeiten durch eine exakte hyperreelle Gegenüberstellung:

$$\text{bare mass} + \text{self-energy} = \text{pole} + \text{counter-pole} + \text{finite remainder.}$$

Pol und Gegenpol heben sich algebraisch auf:

$$P_{\text{bare}} + P_{\text{self}} = 0.$$

Was übrig bleibt, ist endlich und messbar:

$$m_{\text{phys}} = R_{\text{bare}} + R_{\text{mass}}.$$

Der endliche Rest ergibt sich nicht allein aus der Selbstenergiesumme. Er hängt auch von der Renormierungsbedingung ab, also davon, wie die theoretischen Parameter an die experimentell beobachtete Elektronenmasse angepasst werden.

Fazit der Herleitung

Die Elektronen-Selbstenergie muss nicht als undefinierte Unendlichkeit gelesen werden. In der nichtstandardanalytischen Formulierung wird sie zu einem exakt angegebenen hyperreellen Pol plus einem endlichen regulären Rest.

Die wesentliche strukturelle Zerlegung lautet

$$E_{\text{self}} = P_{\text{self}} + R_{\text{mass}}.$$

Die nackte Masse liefert den zugehörigen Gegenpol,

$$P_{\text{bare}} = -P_{\text{self}},$$

so dass die physikalische Masse endlich bleibt:

$$m_{\text{phys}} = R_{\text{bare}} + R_{\text{mass}}.$$

Damit kann die Renormierung der QED als exakte algebraische Auslöschung hyperreeller Polterme unter einem gemeinsamen Cut-off interpretiert werden. Die messbare Elektronenmasse ist keine divergente Größe, sondern der endliche Rest, der nach dieser Auslöschung und nach der Anpassung der Theorie an das Experiment verbleibt.

Feynmans Pfadintegrale

Feynmans Pfadintegrale als streng hyperendliche Summen

Die Pfadintegral-Formulierung der Quantenmechanik von Richard Feynman ist physikalisch sehr anschaulich: Ein Teilchen wird nicht durch einen einzigen ausgezeichneten Weg beschrieben, sondern durch eine Überlagerung möglicher Wege durch Raum und Zeit. Mathematisch ist das kontinuierliche Pfadintegral jedoch subtil. Der formale Ausdruck enthält ein Maß über einen unendlichdimensionalen Funktionenraum; ein gewöhnliches translationsinvariantes Maß nach Art des Lebesgue-Maßes existiert dort nicht in naiver Form.

Die etablierte Physik arbeitet deshalb mit Grenzwertkonstruktionen, Regularisierungen, diskreten Zeitscheiben oder mit der Wick-Rotation zur euklidischen Theorie. In der euklidischen Fassung lassen sich viele Modelle über das Wiener-Maß und die Feynman-Kac-Formel streng behandeln.

Im diskretisierten Nichtstandardraum kann dieses Maßproblem anders organisiert werden. Das Pfadintegral wird nicht als unmittelbares Integral über einen fertig gegebenen unendlichdimensionalen Maßraum aufgefasst, sondern als hyperendliche Summe beziehungsweise als hyperendliches Produkt über ein extrem feines Gitter. Dadurch wird der formale Ausdruck zunächst zu einer exakt definierten algebraischen Gittergröße.

Der makroskopisch messbare Anteil entsteht anschließend nicht durch ein nachträgliches Entfernen hyperreeller Größen. Vielmehr wird die hyperendliche Größe normiert, in den infinitesimalen Skalen $\tilde{\omega}$ beziehungsweise \tilde{v} entwickelt und strukturell deflatiert. Der physikalische Messwert ist der reguläre skalenfreie Anteil dieser Entwicklung.

Das Maßproblem im Kontinuum

Im Standardkontinuum verlangt die Summation über alle Pfade ein Integral über unendlich viele Freiheitsgrade. Der formale Ausdruck für den Propagator lautet

$$K(b, a) \propto \int \mathcal{D}x \exp(iS).$$

Dabei bezeichnet $K(b, a)$ den Propagator, also die komplexe Übergangsamplitude vom Anfangspunkt $a = (x_a, t_a)$ zum Endpunkt $b = (x_b, t_b)$. Er ist der Kern der quantenmechanischen Zeitentwicklung. Hierbei ist S die klassische Wirkung, \hbar das Plancksche Wirkungsquantum, und $\mathcal{D}x$ bezeichnet formal das Maß über alle Pfade.

Der Ausdruck ist in dieser Form keine gewöhnliche Lebesgue-Integration. Insbesondere existiert kein naives, translationsinvariantes Lebesgue-Maß auf dem unendlichdimensionalen Pfadraum, das alle gewünschten Eigenschaften gleichzeitig besitzt. Deshalb müssen reale Rechnungen über diskrete Approximationen, Grenzübergänge, Oszillationsintegrale, Distributionen, Operatorverfahren oder euklidische Methoden präzisiert werden.

Die hyperendliche Diskretisierung von Raum und Zeit

Im Nichtstandardraum wird die Zeitspanne zwischen Start- und Zielpunkt in eine exakt angegebene mittendliche Anzahl ω von Zeitschritten der infinitesimalen Dauer Δt unterteilt. Ebenso wird der Raum durch ein hyperfeines, aber streng diskretes Gitter modelliert.

Ein einzelner Pfad $x(t)$ ist dann kein beliebiges kontinuierliches Funktional mehr, sondern ein exakt angegebener Vektor aus ω räumlichen Koordinaten. Der Raum aller Gitterpfade ist extrem groß, aber hyperendlich. Das formale Pfadmaß $\mathcal{D}x$ wird in dieser Gitterfassung durch ein hyperendliches Produkt der einzelnen Gitterbeiträge ersetzt:

$$\mathcal{D}x \rightarrow \prod_{k=1}^{\omega} \Delta x_k.$$

Dabei ist wichtig: In physikalischen Anwendungen gehören zu diesem Produkt gewöhnlich noch Normierungsfaktoren, die von Masse, Zeitschritt, Dimension und gewählter Diskretisierung abhängen. Das Produkt beschreibt also den strukturellen Maßkern, nicht bereits die vollständig normierte Propagatorformel.

Die exakte algebraische Summe

Durch die Gitterstruktur entfällt die unmittelbare Notwendigkeit, zuerst ein unendlichdimensionales Lebesgue-Maß zu konstruieren. Das Pfadintegral wird zu einer hyperendlichen Summe über die diskrete Menge aller Gitterpfade P . Die Amplitude besitzt dann schematisch die Form

$$K(b, a) \propto \sum_P \exp(i\hbar S[P]).$$

Da jeder Summand ein komplexer Phasenfaktor vom Betrag 1 ist, ist jeder einzelne Beitrag exakt definiert. Die hyperendliche Summe ist daher algebraisch wohldefiniert. Ihre physikalische Auswertung verlangt jedoch weiterhin eine passende Normierung und die Bestimmung des regulären Anteils.

Es ist daher genauer zu sagen: Das hyperendliche Pfadintegral vermeidet das naive unendlichdimensionale Maßproblem, aber es ersetzt nicht automatisch alle analytischen Fragen. Diese werden vielmehr in Fragen der Normierung, der Entwicklung in den Skalen $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\nu}$, der strukturellen Deflation und der Stabilität des makroskopischen Grenzübergangs übersetzt.

Eine typische normierte hyperendliche Größe besitzt dabei die Form

$$X_{\omega, \nu} = P_{\omega, \nu} + R + I_{\omega, \nu}.$$

Hierbei bezeichnet $P_{\omega, \nu}$ den hyperreellen Pol- beziehungsweise Hintergrundanteil, R den regulären skalenfreien Anteil und $I_{\omega, \nu}$ den infinitesimalen Rest, der aus positiven Potenzen von $\tilde{\omega}$ beziehungsweise $\tilde{\nu}$ besteht. Der makroskopische Messwert ist dann nicht ein äußerlich gebildeter Standardteil, sondern der durch Deflation isolierte reguläre Anteil R .

Stationäre Phase und strukturelle Auslöschung

Wie entsteht aus dieser gewaltigen hyperendlichen Summe die klassische Physik? Der entscheidende Mechanismus ist die stationäre Phase. Für makroskopische Systeme gilt typischerweise $S \gg \hbar$. Der Phasenfaktor $\exp(i\hbar S)$ oszilliert dann für die meisten benachbarten Pfade sehr schnell. In der hyperendlichen Summe löschen sich diese Beiträge durch destruktive Interferenz weitgehend aus.

In der Umgebung solcher Pfade, für die die Wirkung stationär ist, ändert sich die Phase zwischen benachbarten Pfaden dagegen nur langsam. Dort addieren sich die Beiträge konstruktiv. Diese stationären Pfade erfüllen das Prinzip der kleinsten Wirkung beziehungsweise genauer das Prinzip der stationären Wirkung.

In dieser Sicht deflatiert die Summe strukturell: Die stark oszillierenden nichtstationären Pfade bilden einen Hintergrund, dessen Beiträge sich in der makroskopischen Näherung gegenseitig auslöschen. Der führende Beitrag stammt aus der Umgebung der stationären Pfade. Er markiert nicht notwendig exakt einen einzigen klassischen Weg, sondern die klassische Bahn zusammen mit ihren lokalen Fluktuationen.

Quantenfluktuationen als regulärer Rest

Die benachbarten Pfade in der Umgebung der stationären Bahn löschen sich nicht vollständig aus. Sie bilden den regulären Rest der Summation. Dieser Rest enthält die Quantenkorrekturen zur klassischen Bewegung, die Streuung um den klassischen Pfad und Beiträge, die etwa beim Tunneleffekt wesentlich werden.

Auf einem hyperreellen Gitter lassen sich solche Restbeiträge als hyperendliche Summen über diskrete Pfade formulieren. In geeigneten euklidischen Fassungen stehen sie in enger Beziehung zu Random-Walk-Modellen, Brownscher Bewegung und der Feynman-Kac-Formel.

Die Schrödingergleichung ist dabei nicht zwingend der Ausgangspunkt dieser Darstellung. Sie kann vielmehr als makroskopische Gleichung verstanden werden, die mit dem korrekt normierten Pfadintegral äquivalent ist. In diesem Sinn verbindet die Pfadintegralformulierung die lokale Differentialgleichung mit einer globalen Summation über Pfade.

Fazit der Herleitung

Feynmans Pfadintegrale brauchen nicht als naive Integrale über ein unendlichdimensionales Lebesgue-Maß verstanden werden. Gerade diese naive Lesart ist mathematisch problematisch.

Im Nichtstandardraum lässt sich das Pfadintegral als hyperendliche algebraische Summation über diskrete Gitterpfade formulieren. Dadurch wird Feynmans ursprüngliche Intuition präzisiert: Die Quantenamplitude entsteht aus der Überlagerung vieler Pfadbeiträge, während die klassische Bahn durch stationäre Phase und destruktive Interferenz der nichtstationären Pfade hervorgehoben wird.

Die Nichtstandardanalysis löst das Maßproblem nicht dadurch, dass sie ein gewöhnliches unendlichdimensionales Lebesgue-Maß erzeugt. Sie verschiebt die Grundlage der Rechnung auf ein hyperendliches Gitter, auf dem Summen und Produkte zunächst algebraisch exakt definiert sind.

Die physikalische Theorie entsteht anschließend durch Normierung, strukturelle Deflation und den Nachweis, dass der makroskopische Grenzübergang die bekannten Gleichungen der Quantenmechanik liefert. Die makroskopisch messbare Größe wird nicht durch ein nachträgliches Wegwerfen hyperreeller Anteile gewonnen, sondern durch Entwicklung in den infinitesimalen Skalen $\tilde{\omega}$ beziehungsweise $\tilde{\nu}$. Der reguläre Anteil ist der skalenfreie Koeffizient dieser Entwicklung, nachdem die hyperreellen Pole strukturell abgespalten wurden.

Hawking-Strahlung

Die Hawking-Strahlung und das trans-Plancksche Problem

Die theoretische Entdeckung der Hawking-Strahlung gilt als einer der wichtigen Meilensteine der modernen theoretischen Physik, da sie Thermodynamik, Quantenmechanik und die allgemeine Relativitätstheorie in einem gemeinsamen Rahmen berührt. Stephen Hawkings Herleitung zeigt, dass Schwarze Löcher im semiklassischen Bild eine thermische Strahlung besitzen. Zugleich enthält diese Herleitung eine bekannte konzeptionelle Schwierigkeit: das sogenannte trans-Plancksche Problem.

Im Standardkontinuum führt die Rückverfolgung später beobachtbarer Strahlungsmoden zu extrem hohen Frequenzen nahe dem Ereignishorizont. Das ist keine experimentell direkt zugängliche Aussage, sondern eine Folge der idealisierten mathematischen Rückentwicklung der Moden. Die Nichtstandardanalysis kann hier als präzise Sprache dienen, um solche Beiträge nicht als unbestimmte Unendlichkeiten, sondern als exakt angegebene hyperreelle Größen zu behandeln und strukturell von endlichen Restanteilen zu trennen.

Das trans-Plancksche Problem im Kontinuum

Wird ein thermisches Strahlungsquant, das fernab eines Schwarzen Loches registriert wird, formal in der Zeit zurückverfolgt, nähert sich sein Ursprung dem Ereignishorizont an. Aufgrund der gravitativen Frequenzverschiebung, also der Gravitationsrotverschiebung, wird dieselbe Mode in Horizontnähe mit immer höheren Frequenzen beschrieben.

In der Standardanalysis kann diese Frequenz bei idealisierter Rückverfolgung gegen unendlich laufen. Formal bedeutet dies, dass die betreffende Mode in einen Bereich gerät, in dem ihre Wellenlänge unterhalb der Planck-Skala liegt. Genau dort ist aber nicht mehr gesichert, dass die semiklassische Näherung aus klassischer Raumzeit und Quantenfeldtheorie unverändert gültig bleibt.

Das trans-Plancksche Problem ist daher kein unmittelbarer experimenteller Widerspruch, sondern ein Hinweis darauf, dass die Herleitung empfindlich davon abhängt, wie die extrem kurzwelligen Freiheitsgrade behandelt werden.

Das hyperendliche Gitter und die Konstante ω

In der hier betrachteten nichtstandardanalytischen Modellierung gibt es kein unbeschränktes Kontinuum, in dem Frequenzen beliebig eskalieren. Die Raumzeitstruktur am Ereignishorizont wird durch ein feines, aber strikt hyperendliches Gitter beschrieben. Die maximale Frequenz wird durch die mittendliche Konstante ω exakt angegeben und begrenzt.

Zusätzlich wird angenommen, dass Vakuummoden an der Planck-Grenze nicht mehr unverändert mit der makroskopischen Raumzeitkrümmung koppeln. Dazu wird eine glatte Dämpfungsfunktion $g(x)$ eingeführt. Für makroskopische Frequenzen gilt näherungsweise 1 ; an der oberen Grenze ω fällt sie glatt auf Null ab. Es gilt also $g(0) = 1$ und $g(\omega) = 0$.

Die Energiedichte des Vakuumzustands am Horizont wird in diesem Modell als hyperendliche Summe über diskrete Frequenzen n geschrieben:

$$E_{\text{horizont}} \propto \dagger_{n=0}^{\omega} n \cdot g(n).$$

Diese Darstellung ist als Modellkern zu verstehen. Sie ersetzt nicht die vollständige Herleitung der Hawking-Strahlung über Feldmoden, Bogoljubov-Koeffizienten und den Vergleich von einlaufenden und auslaufenden Vakuumzuständen.

Strukturelle Deflation am Horizont

Um den endlichen, physikalisch relevanten Anteil von der Hintergrundstruktur am Ereignishorizont zu trennen, wird die hyperreelle Euler-Maclaurin-Formel auf die Zielfunktion $f(x) = x \cdot g(x)$ angewendet:

$$\dagger_{\check{q}=0}^{\check{r}} f(\check{q}) = \uparrow_0^{\check{r}} f(x) \downarrow x + \check{f}(\check{r}) + \check{f}(0) + \dagger_{\check{m}=1}^{\check{n}-1} \widetilde{m!} B_m \left(\check{m} f(\check{r}) - \check{m} f(0) \right) + \mathcal{O} \left(\widetilde{n!} B_n \left(\check{n} f(\check{r}) - \check{n} f(0) \right) \right).$$

Auch hier spaltet sich das Problem in drei wesentliche strukturelle Komponenten auf:

Das Integral: der hyperreelle Pol Der Integralterm $P_{\text{vakuum}} = \int_0^\omega x \cdot g(x) dx$ repräsentiert den dominanten Hintergrundanteil des Vakuummodells direkt am Ereignishorizont. Er ist der Anteil, der im Standardkontinuum mit dem trans-Planckschen Problem in Verbindung steht. Im hyperreellen Raum ist dieser Term jedoch kein undefiniertes Unendlich, sondern ein exakt angegebener Pol. Für sich allein beschreibt er keine abgestrahlte Hawking-Strahlung, sondern die nicht direkt messbare Hintergrundstruktur des Modells.

Der obere Rand bei ω Da das Raumzeitgitter bei der Konstante ω abschneidet und $g(\omega) = 0$ mit samt der relevanten Ableitungen angenommen wird, verschwinden die entsprechenden Randterme bei der maximalen Frequenz. Es gilt $f(\omega) = 0, {}^1f(\omega) = 0, {}^2f(\omega) = 0$ usf. Auch der addierte Term $\check{f}(\omega)$ ist Null.

In dieser Modellierung wird das trans-Plancksche Problem dadurch reguliert: Die energiereichsten Randmoden werden nicht als physikalisch frei fortsetzbare Moden behandelt, sondern durch den Cut-off aus dem messbaren Rest herausgenommen.

Der untere Rand bei 0: der reguläre Rest Da $f(0) = 0$ ist, verschwindet der isolierte Term $\check{f}(0)$ ebenfalls. Die niederfrequenten, makroskopischen Moden am unteren Rand bestimmen das verbleibende Restglied über die Ableitungsterme:

$$R_{\text{thermisch}} = + \sum_{m=1}^{\check{n}-1} \widetilde{m!} B_m (0 - {}^m f(0)).$$

Dieser Randterm ist als regulärer, makroskopischer Rest der deflatierten Modenstruktur zu verstehen. In einer vollständigen physikalischen Herleitung muss er mit der üblichen Modenanalyse der Hawking-Strahlung zusammengeführt werden, insbesondere mit der thermischen Besetzungszahl, die aus der Mischung positiver und negativer Frequenzen entsteht.

Fazit der Herleitung

Das trans-Plancksche Problem entsteht, wenn die semiklassische Rechnung bis in Frequenzbereiche zurückverfolgt wird, in denen die zugrunde liegende Kontinuumsbeschreibung selbst fraglich wird.

Die nichtstandardanalytische Betrachtung bietet eine präzise Möglichkeit, diesen Sachverhalt anders zu organisieren: Die extremen Frequenzen am Horizont werden in einem dominanten hyperreellen Integral P_{vakuum} gesammelt. Dieses wird nicht als physikalisch unmittelbar abstrahlender Anteil interpretiert, sondern als Hintergrundstruktur des Modells.

Die eigentliche Hawking-Strahlung wird dann nicht aus undefinierten trans-Planckschen Unendlichkeiten gewonnen, sondern aus einem endlichen, regulären Restterm, der nach der algebraischen Abspaltung des hyperreellen Pols verbleibt. Damit wird Hawkings Resultat nicht ersetzt, sondern in einer nichtstandardanalytischen Sprache neu geordnet: Die thermische Strahlung bleibt das makroskopische Resultat, während der trans-Plancksche Anteil als exakt gefasster Hintergrundpol erscheint.

Stringtheorie

Die kritische Dimension der Stringtheorie und die regulierte Nullpunktenergie

Die Stringtheorie beschreibt fundamentale Teilchen nicht als punktförmige Objekte, sondern als eindimensionale schwingende Saiten. In der einfachen bosonischen Stringtheorie führt die Forderung nach quantenmechanischer Konsistenz, insbesondere nach dem Verschwinden der konformen Anomalie, auf die kritische Dimension

$$D = 26.$$

In der Superstringtheorie ergibt sich entsprechend

$$D = 10.$$

Ein zentraler Baustein dieser Rechnungen ist die regulierte Nullpunktenergie der unendlich vielen Stringmoden. Dabei tritt formal die divergente Summe

$$1 + 2 + 3 + \dots$$

auf. In der üblichen Behandlung wird ihr über analytische Fortsetzung, Zeta-Regularisierung oder verwandte Verfahren der Wert

$$\zeta(-1) = \widetilde{12}$$

zugeordnet. Nichtstandardanalytisch ist dieser Wert jedoch nicht die Summe aller Moden selbst, sondern der reguläre Rest nach Abspaltung eines dominanten Hintergrundanteils.

Die Nullpunktenergie der Strings

Ein String besitzt unendlich viele Schwingungsmoden. Jede Mode verhält sich formal wie ein quantenmechanischer harmonischer Oszillator. Die Nullpunktenergie enthält daher einen Summenkern der Form

$$E \propto \sum_{n=1}^{\infty} n.$$

Im gewöhnlichen Sinn divergiert diese Summe. In der Standardformulierung wird sie daher nicht als gewöhnliche Summe ausgewertet, sondern reguliert. Häufig findet sich verkürzt

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \widetilde{12}.$$

Diese Schreibweise ist nützlich, aber missverständlich: Sie sagt nicht, dass die gewöhnliche oder hyperendliche Summe tatsächlich gleich $\widetilde{12}$ wäre. Sie bezeichnet nur den regulierten Restwert.

In der bosonischen Stringtheorie tritt dieser Restwert im Normalordnungsbeitrag beziehungsweise im Achsenabschnitt der Stringmoden auf. Schematisch kann die Dimensionsbedingung als

$$(\tilde{D} - 1) \cdot \widetilde{12} + 1 = 0$$

geschrieben werden, woraus

$$D = 26$$

folgt. Diese Kurzform fasst jedoch nur einen Teil der vollständigen Konsistenzbedingung zusammen. Zur üblichen Herleitung gehören auch die Virasoro-Algebra, die Lorentzinvarianz und die Aufhebung der konformen Anomalie.

Hyperreelle Deflation der Schwingungsmoden

Im diskretisierten Nichtstandardraum laufen physikalische Frequenzen nicht in ein unbestimmtes Unendliches. Sie reichen bis zu einer fundamentalen mittendlichen Konstanten ω . Mit einem physikalischen Dämpfungsfaktor $g(n)$ an der Planck-Skala,

$$g(0) = 1, \quad g(\omega) = 0,$$

lautet die hyperendliche Modensumme

$$E \propto \uparrow_{n=1}^{\omega} n \cdot g(n).$$

Wird die hyperreelle Euler-Maclaurin-Formel auf

$$f(x) = x \cdot g(x)$$

angewendet, zerfällt die Summe in einen dominanten Integralterm und Randbeiträge.

Wird g so gewählt, dass am oberen Rand die relevanten Ableitungen verschwinden,

$$f(\omega) = 0, \quad {}^1f(\omega) = 0, \quad {}^2f(\omega) = 0, \quad \text{usf.},$$

dann liefern die oberen Randterme keinen regulären Beitrag. Am unteren Rand gilt für niedrige Frequenzen näherungsweise $g(x) = 1$, also

$${}^1f(0) = 1.$$

Der erste reguläre Restterm stammt aus dem Bernoulli-Term zweiter Ordnung mit

$$B_2 = \widetilde{6}.$$

Damit ergibt sich

$$R_{\text{string}} = 2!B_2(0 - {}^1f(0)) = \widetilde{12}^-.$$

Die hyperendliche Nullpunktstruktur lautet daher nicht

$$E \propto \widetilde{12}^-,$$

sondern

$$E \propto \uparrow_0^{\omega} x \cdot g(x) \downarrow x - \widetilde{12}^-.$$

Der Wert $\widetilde{12}^-$ ist also der reguläre Rest der deflatierten Summenstruktur, nicht die gesamte hyperendliche Energie.

Der kritische Punkt

Die nichtstandardanalytische Betrachtung zeigt, woher der Wert

$$\widetilde{12}^-$$

strukturell stammt: Er ist der finite Restterm am unteren Rand des Modenspektrums nach Abspaltung des dominanten hyperreellen Integralanteils.

Problematisch ist daher nicht die Regularisierung selbst, sondern eine zu wörtliche Lesart der Kurzform

$$1 + 2 + 3 + \dots = \widetilde{12}^-.$$

Aus nichtstandardanalytischer Sicht muss zusätzlich geklärt werden, was mit dem hyperreellen Hintergrundanteil

$$\uparrow_0^{\omega} x \cdot g(x) \downarrow x$$

geschieht. Beim Casimir-Effekt gibt es eine Differenzbildung zwischen zwei Geometrien, durch die gemeinsame Hintergrundanteile gegeneinander bilanziert werden. Bei der isolierten Betrachtung eines Strings muss ein entsprechender Auslöschungs- oder Kalibrierungsmechanismus ausdrücklich angegeben werden.

Die kritische Dimension

$$D = 26$$

ist daher nicht einfach eine willkürliche Folge einer verbotenen Summierung. Sie gehört zu einer umfassenderen Konsistenzbedingung der quantisierten Stringtheorie. Der nichtstandardanalytische Einwand lautet präziser: Der regulierte Wert $\widetilde{12}$ darf nur dann allein in die Dimensionsbedingung eingehen, wenn der hyperreelle Hintergrundanteil durch Symmetrie, Eichbedingung, Normalordnung, Referenzsubtraktion oder einen anderen exakt angegebenen Mechanismus aus der messbaren Bilanz entfernt beziehungsweise kompensiert wird.

Fazit der Herleitung

Die Gleichung

$$1 + 2 + 3 + \dots = \widetilde{12}$$

ist keine Aussage über die gewöhnliche Summe aller natürlichen Zahlen und auch keine Aussage über die vollständige hyperendliche Modensumme. Sie beschreibt den regulierten Restwert

$$\zeta(-1) = \widetilde{12}.$$

Die Nichtstandardanalysis macht diesen Unterschied sichtbar: Die hyperendliche Summe der Stringmoden deflatiert in einen dominierenden Hintergrundanteil und einen regulären Rest. Der Wert $\widetilde{12}$ gehört zum Rest, nicht zum gesamten Summenkern.

Die kritische Dimension der Stringtheorie sollte daher nicht als isolierte Gleichsetzung der vollständigen Nullpunktenergie mit diesem Restwert gelesen werden. Aus nichtstandardanalytischer Sicht muss ausdrücklich angegeben werden, durch welchen strukturellen Mechanismus der hyperreelle Hintergrundanteil aus der physikalisch messbaren Bilanz verschwindet.



Boris Haase

Lebenslauf

1964 geboren in Kiel als erster Sohn von Dr. jur. Udo Haase und seiner Ehefrau Angela,
1966 Geburt des Bruders Nicolai,
1969 Umzug nach Detmold mit anschließender Grundschul- und Gymnasialzeit,
1983 Teilnahme am Landeswettbewerb Jugend forscht in Niedersachsen,
1984 Abitur in Göttingen, dann Grundwehrdienst bei der 5./12 in Osterode am Harz,
1985 Beginn Studium Mathematik mit Nebenfach Informatik (am Anfang Physik),
1990 Ausbildung zum Datenverarbeitungskaufmann,
1993 Beginn der Berufstätigkeit als EDV-Fachkraft am Kreiskrankenhaus Hameln,
1997 Wechsel an das Klinikum Hanau in der gleichen Tätigkeit (bis heute),
1998 Beginn Studium Philosophie mit den Nebenfächern Politikwissenschaft und Soziologie (bis 2004),
2000 Beginn der Arbeit an den Homepages und Tod der Mutter (2006),
2011 Veröffentlichung des Buches „Relil - Religion und Lebensweg“,
2014 Veröffentlichung der ersten Auflage des Buches „Nichtstandardmathematik“,
2020 Beginn Studium Informatik an der Fernakademie Hamburg mit Abschluss 2021.

Anschrift: Cranachstr. 4, D-63452 Hanau, mail@boris-haase.de

Anhang: FastShift-Verfahren zur Matrixmultiplikation in C++

Mit Mathematica überprüfte Modellierung der nichtlinearen Laufzeit $T_n^b = O((\ell^2)n^a)$

Das folgende C++-Programm ergibt für jede $n \times n$ -Matrix mit der *Schleifenzahl* $a \in \{2, 3\}$, der *Bitlänge* b und der ganzzahligen (!) *Rekursionstiefe* $\ell = 2n$ speziell die Laufzeiten $T_c^b = O(1)n^3$ und $T_f^b = O(\ell^2)n^2$.

```
1 // FastShift algorithm as fastintopt.cpp by Boris Haase (01.01.2026)
2 // g++ -O3 -std=gnu++17 -march=native -fopenmp fastintopt.cpp -o fastintopt -lgmpxx -lgmp
3 #include <algorithm>
4 #include <chrono>
5 #include <iostream>
6 #include <vector>
7 #include <gmpxx.h>
8 #include <omp.h>
9 using namespace std;
10 static inline void mpz_addmul_cpp(mpz_class &rop, const mpz_class &op1, const mpz_class &op2) {
11     mpz_addmul(rop.get_mpz_t(), op1.get_mpz_t(), op2.get_mpz_t());
12 }
13 static inline void fdiv_qr(mpz_class &q, mpz_class &r, const mpz_class &a, const mpz_class &b) {
14     mpz_fdiv_qr(q.get_mpz_t(), r.get_mpz_t(), a.get_mpz_t(), b.get_mpz_t());
15 }
16 struct FlatM {
17     mpz_class* ptr = nullptr;
18     std::size_t row_stride = 0;
19     std::vector<mpz_class> data;
20     FlatM() = default;
21     explicit FlatM(int n) : row_stride((std::size_t)n), data((std::size_t)n * n) { ptr = data.data(); }
22     FlatM(mpz_class* raw_ptr, std::size_t stride) : ptr(raw_ptr), row_stride(stride) {}
23     inline mpz_class& operator()(int i, int j) { return *(ptr + i * row_stride + j); }
24     inline const mpz_class& operator()(int i, int j) const { return *(ptr + i * row_stride + j); }
25     inline FlatM submatrix(int ro, int co) const { return FlatM(ptr + ro * row_stride + co, row_stride); }
26 };
27 static FlatM multiply_blocked(const FlatM& A, const FlatM& B, int n) {
28     FlatM C(n);
29     const int bs = 64;
30     if (!omp_in_parallel()) {
31         #pragma omp parallel for collapse(2) schedule(static)
32         for (int i0 = 0; i0 < n; i0 += bs)
33             for (int j0 = 0; j0 < n; j0 += bs) {
34                 int ie = min(i0 + bs, n), je = min(j0 + bs, n);
35                 for (int k0 = 0; k0 < n; k0 += bs) {
36                     int ke = min(k0 + bs, n);
37                     for (int i = i0; i < ie; ++i)
38                         for (int k = k0; k < ke; ++k) {
39                             const mpz_class& av = A(i, k);
40                             for (int j = j0; j < je; ++j) mpz_addmul_cpp(C(i, j), av, B(k, j));
41                         }
42                     }
43             }
44     return C;
45 }
46 for (int i0 = 0; i0 < n; i0 += bs)
47     for (int j0 = 0; j0 < n; j0 += bs) {
48         int ie = min(i0 + bs, n), je = min(j0 + bs, n);
49         for (int k0 = 0; k0 < n; k0 += bs) {
50             int ke = min(k0 + bs, n);
51             for (int i = i0; i < ie; ++i)
52                 for (int k = k0; k < ke; ++k) {
53                     const mpz_class& av = A(i, k);
54                     for (int j = j0; j < je; ++j) mpz_addmul_cpp(C(i, j), av, B(k, j));
55                 }
56         }
57     }
58 return C;
59 }
60 static FlatM add_shiR(const FlatM& C, const FlatM& D, int n, int r_bits) {
61     FlatM R(n);
62     if (!omp_in_parallel() && n >= 256) {
63         #pragma omp parallel for collapse(2) schedule(static)
64         for (int i = 0; i < n; ++i)
65             for (int j = 0; j < n; ++j) {
66                 mpz_mul_2exp(R(i, j).get_mpz_t(), C(i, j).get_mpz_t(), r_bits);
67                 mpz_add(R(i, j).get_mpz_t(), R(i, j).get_mpz_t(), D(i, j).get_mpz_t());
68             }
69     return R;
70 }
71 for (int i = 0; i < n; ++i)
72     for (int j = 0; j < n; ++j) {
73         mpz_mul_2exp(R(i, j).get_mpz_t(), C(i, j).get_mpz_t(), r_bits);
74         mpz_add(R(i, j).get_mpz_t(), R(i, j).get_mpz_t(), D(i, j).get_mpz_t());
75     }
76 return R;
77 }
78 static FlatM div_modR(const FlatM& S11, const FlatM& S12, const FlatM& S21, const FlatM& S22, int n, int s_bits) {
79     int m = n / 2; FlatM R(n); mpz_class B = mpz_class(1) << s_bits, H = B >> 1;
80     if (!omp_in_parallel() && m >= 256) {
81         #pragma omp parallel for collapse(2) schedule(static)
82         for (int i = 0; i < m; ++i)
83             for (int j = 0; j < m; ++j) {
84                 mpz_class q, r, St = S11(i, j) + S12(i, j);
85                 fdiv_qr(q, r, St, B);
86                 if (r > H) { ++q; r -= B; } else if (r <= -H) { --q; r += B; }
87                 R(i, j) = q; R(i, j + m) = r;
88                 mpz_class Sb = S21(i, j) + S22(i, j);
89                 fdiv_qr(q, r, Sb, B);
90                 if (r > H) { ++q; r -= B; } else if (r <= -H) { --q; r += B; }
91                 R(i + m, j) = q; R(i + m, j + m) = r;

```

```

92     }
93     return R;
94 }
95 for (int i = 0; i < m; ++i)
96     for (int j = 0; j < m; ++j) {
97         mpz_class q, r, St = S11(i, j) + S12(i, j);
98         fdiv_qr(q, r, St, B);
99         if (r > H) { ++q; r -= B; } else if (r <= -H) { --q; r += B; }
100        R(i, j) = q; R(i, j + m) = r;
101        mpz_class Sb = S21(i, j) + S22(i, j);
102        fdiv_qr(q, r, Sb, B);
103        if (r > H) { ++q; r -= B; } else if (r <= -H) { --q; r += B; }
104        R(i + m, j) = q; R(i + m, j + m) = r;
105    }
106    return R;
107 }
108 static FlatM fastshift_rec(const FlatM& Y, const FlatM& Z, int n, int s_bits, int leaf_cutoff, int depth) {
109     if (n <= leaf_cutoff) return multiply_blocked(Y, Z, n); else depth++;
110     int m = n / 2, t_bits = s_bits * 2;
111     FlatM A = add_shiR(Z.submatrix(0, 0), Z.submatrix(0, m), m, s_bits);
112     FlatM B = add_shiR(Z.submatrix(m, 0), Z.submatrix(m, m), m, s_bits);
113     FlatM U, V, W, X;
114     if (depth < 3) {
115         #pragma omp taskgroup
116         {
117             #pragma omp task shared(U)
118             U = fastshift_rec(Y.submatrix(0, 0), A, m, t_bits, leaf_cutoff, depth);
119             #pragma omp task shared(V)
120             V = fastshift_rec(Y.submatrix(0, m), B, m, t_bits, leaf_cutoff, depth);
121             #pragma omp task shared(W)
122             W = fastshift_rec(Y.submatrix(m, 0), A, m, t_bits, leaf_cutoff, depth);
123             #pragma omp task shared(X)
124             X = fastshift_rec(Y.submatrix(m, m), B, m, t_bits, leaf_cutoff, depth);
125         }
126     } else {
127         U = fastshift_rec(Y.submatrix(0, 0), A, m, t_bits, leaf_cutoff, depth);
128         V = fastshift_rec(Y.submatrix(0, m), B, m, t_bits, leaf_cutoff, depth);
129         W = fastshift_rec(Y.submatrix(m, 0), A, m, t_bits, leaf_cutoff, depth);
130         X = fastshift_rec(Y.submatrix(m, m), B, m, t_bits, leaf_cutoff, depth);
131     }
132     return div_modR(U, V, W, X, n, s_bits);
133 }
134 int main(int argc, char** argv) {
135     int threads = 8, bits = 256, m_min = 8, m_max = 13, leaf_cutoff = 2048;
136     if (argc > 1) threads = max(1, atoi(argv[1]));
137     if (argc > 2) bits = max(1, atoi(argv[2]));
138     if (argc > 3) m_min = max(1, atoi(argv[3]));
139     if (argc > 4) m_max = max(m_min, atoi(argv[4]));
140     if (argc > 5) leaf_cutoff = max(16, atoi(argv[5]));
141     omp_set_num_threads(threads);
142     for (int m = m_min; m <= m_max; ++m) {
143         int n = 1 << m, s_bits = bits * 2 + m;
144         cout << "FastShift " << bits << " Bits | n=2^" << m << " | leaf_cutoff=" << leaf_cutoff << endl;
145         gmp_randclass rng(gmp_randinit_default); rng.seed(42u + m);
146         FlatM A(n), B(n);
147         for (int i = 0; i < n; ++i) for (int j = 0; j < n; ++j) { A(i, j) = rng.get_z_bits(bits);
148             B(i, j) = rng.get_z_bits(bits); }
149         auto t1 = chrono::steady_clock::now();
150         FlatM Cf = fastshift_rec(A, B, n, s_bits, leaf_cutoff, 0);
151         auto t2 = chrono::steady_clock::now();
152         FlatM Cs = multiply_blocked(A, B, n);
153         auto t3 = chrono::steady_clock::now();
154         auto ms_fs = chrono::duration_cast<chrono::milliseconds>(t2 - t1).count();
155         auto ms_std = chrono::duration_cast<chrono::milliseconds>(t3 - t2).count();
156         cout << "n = " << n << " | FS: " << ms_fs << " ms | Std: " << ms_std << " ms | "
157             << (Cf(0,0)==Cs(0,0) ? "OK" : "Error") << endl;
158     }
159     return 0;
160 }

```

Listing 1: Ganzzahliges FastShift-Verfahren in C++

Tabelle 2: Laufzeit-Mittelwerte auf AMD EPYC™ 9645 (24 Kerne, 128 GB DDR5).
Vergleich von T_c (Standard) und T_f (FastShift) in ms bei $k = 3$ Messungen.

ℓ	T_c^{64}	T_f^{64}	Quotient	T_c^{128}	T_f^{128}	Quotient
10	938	881	1,06	1096	1151	0,95
11	6157	6170	1,00	8295	8440	0,98
12	41 525	27 483	1,51	62 070	42 443	1,46
13	322 066	131 767	2,44	484 108	257 820	1,88

Anmerkung: Bei 256 Bit nivellieren sich die Vorteile auf dieser Architektur nahezu.

Symbolverzeichnis

Symbol	Verwendung	Interpretation
\sim	\tilde{a}	Kehrwert von a : $1/a$ bzw. a^{-1} für $a \neq 0$ (gesprochen „kehr“)
$\dot{\sim}$	\acute{a}	Dekrement von a : $a - 1$ (gesprochen „dek“)
$\dot{\smile}$	\grave{a}	Inkrement von a : $a + 1$ (gesprochen „ink“)
$\hat{\sim}$	\hat{a}	Doppeltes von a : $2a$ (gesprochen „dach“)
$\check{\sim}$	\check{a}	Hälfte von a : $a/2$ (gesprochen „halb“)
$-$	$a-$	a negiert: $a-$ (gesprochen „neg“)
$_$	$z = a + \underline{b}$	Komplexer Teil von z : \underline{b} mit der imaginären Einheit $\underline{1}$ (gesprochen „im“)
ν	${}^\nu A$	größte endliche Zahl: Durchschnitt der komplexen oder reellen Menge A mit ${}^\nu \mathbb{C} := [-\nu, \nu] + \underline{1}[-\nu, \nu]$
ω	${}^\omega A$	größte mittendliche Zahl: Durchschnitt der komplexen oder reellen Menge A mit ${}^\omega \mathbb{C} := [-\omega, \omega] + \underline{1}[-\omega, \omega]$
l	$l = \min \mathbb{R}_{>0}$	kleinste positive reelle Zahl
n	${}^n a = a^{(n)}$	n -te Ableitung von a (gesprochen „n von a“)
b	${}_b a = \log_b a$	Logarithmus zur Basis b für $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ (gesprochen „b log a“)
1	${}_1 x = x/\ x\ $	Einheitsvektor zu $x \neq 0$
∞	$\infty \gg t^2$	Ersetzen von ± 0 durch $\pm \tilde{\infty}$ sowie $A_\infty := A \cup \{\pm \infty\}$ für die Menge $A \subseteq \mathbb{R}$
\mathbb{M}	$\mathbb{M}_{\mathbb{R}} = {}^\omega \mathbb{R} \setminus {}^\nu \mathbb{R}$	mittendliche Zahlen: $\mathbb{M}_{\mathbb{C}} := \mathbb{M}_{\mathbb{R}} + \underline{\mathbb{M}}_{\mathbb{R}}$
\cdot	\dot{A}	punktsymmetrische Menge A (gesprochen „punkt“)
\mathbb{C}	$\mathbb{C}_{(m=)1}^{n;s} a_m$	Verkettung (gesprochen „con“) der a_m zu a_1, \dots, a_n mit Schrittweite s (gesprochen „schritt“) - es gibt Analogien zu $\dot{+}$, $\dot{\pm}$, $\dot{-}$ und $\dot{\times}$ statt \mathbb{C}
\leftarrow	\overleftarrow{a}	Vorgänger von a (gesprochen „prä“)
\rightarrow	\overrightarrow{a}	Nachfolger von a (gesprochen „post“)
\uparrow	$a \uparrow_n$	n -malige Wiederholung von a in der Form $(a, \dots, a)^T$ (gesprochen „rep“)
\uparrow	$a \uparrow_{f(w)}$	f -Mittel mit Funktion f von a_1, \dots, a_n mit $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ (evtl. mit Gewichtsvektor $w \in [0, 1]^n$) bzw. Hölder-Mittel zur Stufe $r \in {}^\nu \mathbb{R}^*$ statt f (gesprochen „mitt“)
\downarrow	$\downarrow x$	Differential von x (gesprochen „ab“)
\uparrow	$\uparrow f(x) \downarrow x$	Integral von $f(x)$ (gesprochen „auf“)
\square		Ende des Beweises
\triangle		Ende der Definition

Literaturverzeichnis

- [1] D. Borwein, J. M. Borwein, P. B. Borwein und R. Girgensohn: *Giuga's Conjecture on Primality*; Amer. Math. Monthly 103:40-50; 1996.
- [2] Croft, Hallard T.; Falconer, Kenneth J.; Guy, Richard K.: *Unsolved Problems in Geometry*; Reprint of 1st Ed.; 2013; Springer; New York.
- [3] Deiser, Oliver: *Einführung in die Mengenlehre*; 1. Aufl.; 2002; Springer; Berlin.
- [4] Gelbaum, Bernard R.; Olmsted, John M. H.: *Counterexamples in Analysis*; Republ., unabr., slightly corr.; 2003; Dover Publications; Mineola, New York.
- [5] Golub, Gene H.; van Loan, Charles F.: *Matrix Computations*; 3rd Ed.; 1996; Johns Hopkins University Press; Baltimore.
- [6] Guy, Richard K.: *Unsolved Problems in Number Theory*; 3rd Ed.; 2004; Springer; New York.
- [7] Hämmerlin, Günther; Hoffmann, Karl-Heinz: *Numerische Mathematik*; 2. Aufl.; 1991; Springer; Berlin.
- [8] Hermann, Martin: *Numerische Mathematik*; 3., überarb. u. erw. Aufl.; 2011; Oldenbourg; München.
- [9] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis Teil 1*; 17., akt. Aufl.; 2009; Vieweg + Teubner; Wiesbaden.
- [10] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis Teil 2*; 14., überarb. Aufl.; 2008; Vieweg + Teubner; Wiesbaden.
- [11] Hilbert, David: *Grundlagen der Geometrie*; 2. Aufl.; 1903; Teubner; Leipzig.
- [12] Hoffmann, Dirk W.: *Theoretische Informatik*; 4., akt. Aufl.; 2018; Carl Hanser; München.
- [13] Ivic, Aleksandar: *The Riemann Zeta-Function*; Reprint; 2003; Dover Publications; Mineola.
- [14] Kac, Mark: *On the Average Number of Real Roots of a Random Algebraic Equation*; Bull. Amer. Math. Soc. 49 (4); 1943; 314 - 320.
- [15] Knabner, Peter; Barth, Wolf: *Lineare Algebra*; 2., überarb. und erw. Aufl.; 2018; Springer; Berlin.
- [16] Knuth, Donald Ervin: *The Art of Computer Programming Volume 2*; 3rd Ed.; 1997; Addison Wesley; Reading.
- [17] Köhler, Günter: *Analysis*; 1. Aufl.; 2006; Heldermann; Lemgo.
- [18] Kowalsky, Hans-Joachim: *Topologische Räume*; 1. Aufl.; 1961; Birkhäuser; Basel.
- [19] Landers, Dieter; Rogge, Lothar: *Nichtstandard Analysis*; 1. Aufl.; 1994; Springer; Berlin.
- [20] Mollin, Richard A.: *Advanced Number Theory with Applications*; 1st Ed.; 2017; Routledge; Milton Park.
- [21] Querenburg, Boto von: *Mengentheoretische Topologie*; 3., neu bearb. u. erw. Aufl.; 2001; Springer; Berlin.
- [22] Remmert, Reinhold: *Funktionentheorie 1*; 3., verb. Aufl.; 1992; Springer; Berlin.
- [23] Remmert, Reinhold: *Funktionentheorie 2*; 1. unveränd. Nachdruck der 1. Aufl.; 1992; Springer; Berlin.
- [24] Robbins, Herbert, *A Remark on Stirling's Formula*, The American Mathematical Monthly, 62 (1); 1955; 26 - 29.
- [25] Scheid, Harald: *Zahlentheorie*; 1. Aufl.; 1991; Bibliographisches Institut; Mannheim.
- [26] Schwarz, Hans Rudolf; Köckler, Norbert: *Numerische Mathematik*; 7., überarb. Aufl.; 2009; Vieweg + Teubner; Wiesbaden.
- [27] Slapničar, Ivan: *There are no cycles in the $3n + 1$ sequence*; arXiv: 1706.08399v1.
- [28] Vanderbei, Robert J.: *Linear Programming*; 3rd Ed.; 2008; Springer; New York.
- [29] Walter, Wolfgang: *Analysis 1*; 3., verb. Aufl.; 1992; Springer; Berlin.
- [30] Walter, Wolfgang: *Analysis 2*; 5., erw. Aufl.; 2002; Springer; Berlin.
- [31] Walter, Wolfgang: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*; 7. Aufl.; 2000; Springer; Berlin.
- [32] Whittaker, Edmund T.; Watson, George N.: *A Course of Modern Analysis*; 5th Ed.; 2021; Cambridge University Press; Cambridge.

Notizen: