Inhalte

Aktuell
Version 6.8 vom 22.02.2024: Erscheinen der zwölften Auflage von "Nichtstandardmathematik".

Einleitung (Stand: 05.09.2019)
Was ist das Ziel dieser Homepage?

Fragen und Antworten (Stand: 01.03.2021)
FAQ

Informatik (Stand: 29.01.2023)
Funkrechnen, Internet und Co, Programmieren mit Pfeil, Superrechner und theoretische Informatik

Mathematik (Stand: 08.10.2022)
Euklidische Geometrie, gerechtes Verteilen, lineare Optimierung, Mengenlehre, Nichtstandardanalysis, Ratschläge, Topologie, wissenschaftliches Rechnen, Zahlentheorie und Zeitrechnung

Musik (Stand: 01.10.2013)
Musik auf https://de.boris-haase.de/mus

Physik (Stand: 08.06.2019)
Schwingungen und Universum

Über mich (Stand: 13.08.2021)
Boris Haase

Literaturverzeichnis (Stand: 20.02.2024)
Verwendete Bücher

Schlagwortverzeichnis (Stand: 08.10.2022)
Zentrale Begriffe

Definitionen und Glossar (Stand: 07.04.2022)
Abweichend verwendete Begriffe

Privat (Stand: 05.12.2008)
Zugang nur mit Benutzer und Kennwort
Änderungshistorie:

29.01.2023: Superrechner eingefügt. #60
08.10.2022: Wissenschaftliches Rechnen eingefügt. #59
10.08.2022: Nichtstandardanalysis verbessert. #58
09.08.2022: Zahlentheorie verbessert. #57
07.04.2022: Programmieren mit Stair (in Pfeil) geändert. #56
23.05.2020: Lineare Optimierung verbessert. #55
05.09.2019: Komplette Informatik überarbeitet sowie Sortieren und Suchen in theoretische Informatik umbenannt. #54
08.06.2019: Universum überarbeitet. #53
05.04.2019: Topologie ergänzt. #52
09.03.2019: Seiten auf MathJax umgestellt.
11.02.2019: Lineare Optimierung verbessert. #51
10.11.2018: Mengenlehre erweitert. #50
23.10.2018: Ratschläge eingefügt. #49
14.07.2018: Lineare Optimierung verbessert. #48
07.03.2018: Nichtstandardanalysis erweitert. #47
06.03.2018: Zahlentheorie ergänzt. #46
27.11.2017: Lineare Optimierung verbessert. #45
04.09.2017: Euklidische Geometrie ergänzt. #44

© 1983-2024 by Boris Haase

14.12.2016: Mengenlehre verbessert. #43
04.10.2016: Lineare Optimierung verbessert. #42
29.06.2016: Zahlentheorie erweitert. #41
22.05.2016: Lineare Optimierung verbessert. #40
17.11.2015: Mengenlehre erweitert. #39
15.04.2015: Einleitung und Mathematik ergänzt und lineare Optimierung verbessert. #38
22.02.2015: Nichtstandardanalysis verbessert. #37
21.06.2014: Nichtstandardanalysis verbessert. #36
31.12.2013: Nichtstandardanalysis verbessert. #35
29.12.2013: Zahlentheorie verbessert. #34
28.12.2013: Mengenlehre verbessert. #33
24.11.2013: Euklidische Geometrie gekürzt und verbessert. #32
05.10.2013: Nichtstandardanalysis ergänzt. #31
01.10.2013: Musik eingefügt und Einleitung ergänzt.
02.06.2013: Nichtstandardanalysis erweitert. #30
24.02.2013: Mathematik geändert und lineare Optimierung ergänzt und verbessert. #29
14.01.2013: Einleitung und Mathematik ergänzt und Topologie eingefügt. #28
25.11.2012: Lineare Optimierung verbessert und Mathematik erweitert. #27
12.06.2012: Nichtstandardanalysis und Mathematik ergänzt. #26
07.04.2012: Nichtstandardanalysis verbessert. #25
06.04.2012: Zahlentheorie und Mathematik verbessert. #24
05.04.2012: Mengenlehre verbessert. #23
30.10.2011: Formeln in Schwingungen verschönert.
29.10.2011: Nichtstandardanalysis geändert bzw. ergänzt. #22
25.10.2011: Mathematik, Mengenlehre und Zahlentheorie geändert bzw. erweitert. #21
25.09.2011: Funkrechnen eingefügt. #20
22.09.2011: Sortieren und Suchen erweitert. #19
09.07.2011: Sortieren und Suchen sowie Nichtstandardanalysis ergänzt. #18
07.06.2011: Zahlentheorie ergänzt. #17
13.02.2011: Programmieren mit Stair eingefügt, Einleitung und Informatik ergänzt. #16
12.11.2010: Euklidische Geometrie eingefügt und Einleitung und Mathematik erweitert. #15
17.09.2010: Sortieren und Suchen erweitert. #14
03.06.2010: Nichtstandardanalysis eingefügt sowie Einleitung und Mathematik erweitert. #13
30.05.2010: Mengenlehre erweitert. #12
11.04.2010: Einleitung, Informatik und Sortieren um Suchen ergänzt. #11
21.03.2010: Einleitung, Informatik und Sortieren ergänzt. #10
13.03.2010: Schwingungen erweitert. #9
07.03.2010: Problemlösungen eingefügt und Einleitung und Philosophie erweitert. #15
16.01.2010: Mengenlehre ergänzt. #8
23.11.2009: Physik in Schwingungen umbenannt, Universum eingefügt und Physik neu geschrieben. #7
01.10.2009: Zahlentheorie verbessert und erweitert. #6
06.09.2009: Mathematik erweitert und mit Einleitung sowie Über mich geändert. #5
03.09.2009: Mengenlehre, Zahlentheorie und Informatik verbessert und erweitert. #4
30.05.2009: Informatik erweitert. #3
24.05.2009: Mathematik und Mengenlehre grundlegend überarbeitet. #2
25.04.2009: Seiten auf XHTML 1.1 umgestellt, Suchfunktion verbessert und verwendete Dateien einheitlicher umbenannt.
22.02.2009: Schlagwortkatalog verbessert und Homepage von HTML auf XHTML umgestellt.
11.01.2009: Mengenlehre abgeändert und Zahlentheorie eingefügt. #1
05.12.2008: Größen- und Farbwechsel sowie RSS-Feed eingefügt.
09.11.2008: Mengenlehre verbessert.
28.09.2008: Linguistik feiner untergliedert in binäre Schrift, Font Fonto, Geschlechtsneutralität (neu) und Plansprache Lango.
24.08.2008: Lineare Optimierung eingefügt.
05.07.2008: Internet und Co erweitert.
03.05.2008: Definitionen und Glossar eingefügt.
29.04.2008: Fehlerseite angelegt und sprachunabhängigen Code programmiert.
26.04.2008: Schlagwortverzeichnis eingefügt.
20.04.2008: Statistik eingefügt.
13.04.2008: Homepage nach W3C validiert und PHP-Code als Text eingefügt.

05.04.2008: Informatik überarbeitet und Internet und Co und Sortieren neu eingefügt.
11.02.2008: Über mich geändert.
26.10.2007: Literaturverzeichnis eingefügt und Einleitung erweitert.
16.09.2007: Zeitrechnung erweitert.
11.02.2007: Zahlen/Mengenlehre zu Mengenlehre verkürzt.
29.01.2007: Physik eingefügt.
23.01.2007: Zahlen/Mengenlehre ergänzt.
22.01.2007: Zahlen/Mengenlehre erweitert.
07.01.2007: Zahlen/Mengenlehre geändert.
02.01.2007: Zahlen/Mengenlehre um weitere Beispiele ergänzt.
01.01.2007: Zahlen/Mengenlehre um Überlegungen zur Approximationsordnung erweitert.
31.12.2006: Mathematik ergänzt.
30.12.2006: Informatik um Überlegungen im n-dimensionalen Raum ergänzt.
03.09.2006: Komplette Überarbeitung der Seiten.
30.07.2006: Privatbereich mit Weblog als Tagebuch angelegt.

Aktuell

22.02.2024: Erscheinen der zwölften Auflage von "Nichtstandardmathematik".
23.02.2023: Erscheinen der elften Auflage von "Nichtstandardmathematik".
22.02.2022: Erscheinen der zehnten Auflage von "Nichtstandardmathematik".
01.02.2021: Erscheinen der neunten Auflage von "Nichtstandardmathematik".
22.11.2020: Homepage auf WordPress umgestellt.
01.07.2020: Erscheinen der achten Auflage von "Nichtstandardmathematik".
02.07.2019: Erscheinen der siebten Auflage von "Nichtstandardmathematik".
01.07.2018: Erscheinen der sechsten Auflage von "Nichtstandardmathematik".
02.07.2017: Erscheinen der fünften Auflage von "Nichtstandardmathematik".
01.07.2016: Erscheinen der vierten Auflage von "Nichtstandardmathematik".
21.06.2015: Erscheinen der dritten Auflage von "Nichtstandardmathematik".
20.12.2014: Erscheinen der zweiten Auflage von "Nichtstandardmathematik"http://de.calameo.com/books/0041115149def6f56f80e.
17.08.2014: Erscheinen der Publikation "Nichtstandardmathematik".
02.06.2013: Bestimmung der Riemannschen Zetafunktion für alle natürlichen Argumente.
24.02.2013: Streng polynomiales Normalenverfahren vorgestellt.
14.01.2013: Begriffe der Offenheit und Abgeschlossenheit von Mengen widerlegt.
25.11.2012: Satz zum Simplexverfahren bewiesen.
12.06.2012: Riemannsche Vermutung entzaubert.
20.10.2011: Erscheinen des E-Books "Relil - Religion und Lebensweg".
25.09.2011: Präsentation der Idee des Funkrechnens.
13.02.2011: Vorstellung des Programmierkonzepts Stair.
12.11.2010: Infragestellung einiger Axiome der euklidischen Geometrie.
30.05.2010: Definition der komplexen und reellen Zahlen.
11.04.2010: Darlegung des schnellen Indizierens und des Suchens in O(1).
21.03.2010: Vorstellung des Sortierverfahrens Immediate Sort.
23.11.2009: Vorstellung zweier Modelle des Universums.
03.09.2009: Mathematische Ergebnisse verbessert und erweitert.
24.05.2009: Anzahlen algebraischer Zahlen nun bewiesen.
11.01.2009: Sensationellen Durchbruch im Bereich der transzendenten Zahlen erzielt.
01.12.2007: Ich stelle die Homepage auf PHP und MySQL um.

Abkürzungsverzeichnis

AZ ..... algebraische Zahl
DFT ..... diskrete Fourier-Transformation
GPK ..... Größte-Primzahl-Kriterium
GR ..... geometrische Reihe
GW ..... geschlossener Weg
KI ..... Kurvenintegral
LP ..... lineares Programm
NR ..... Nachbarschaftsrelation
SF ..... Stammfunktion
TR ..... Taylorreihe

Einleitung

Was ist das Ziel dieser Homepage?

Diese Homepage ist Ergebnis meiner eigenständigen Überlegungen in Informatik, Mathematik, Musik und Physik. Die Ideen stammen vermutlich vielfach von Gott, wofür ich mich durch verschiedene Aktionen außerordentlich dankbar gezeigt habe. Die Gedanken und erzielten Forschungsergebnisse sollen einen möglichst breiten Personenkreis ansprechen. Die einzelnen Webseiten sind meistens eher kurz gehalten.

Zitate aus fremden Quellen fehlen weitgehend. Sollte es eine wesentliche Überlegung schon vor dieser Veröffentlichung gegeben haben, so werde ich auf Mitteilung hin entsprechende Zitate einfügen. Es ist aber ein Literaturverzeichnis angegeben, das fast vollständig die in meinem Besitz befindliche Literatur beinhaltet, um für das Verständnis hilfreiche Quellen offenzulegen und Möglichkeiten zur Vertiefung anzubieten.

Der Informatikteil stellt unter theoretische Informatik das schnelle Sortierverfahren Bitsort vor. Das Halteproblem wird neu positiv beantwortet und das P-NP-Problem gelöst. Kenntnisse eines Informatikstudiums sind hilfreich. Funkrechnen ermöglicht durch gleichzeitiges Funken auf verschiedenen Frequenzen paralleles Rechnen durch parallele Kommunikation jeder Speicherzelle mit jeder anderen.

Programmieren mit Pfeil stellt eine zukünftige schnelle, mehrdimensionale und relationale Programmiersprache vor, die Programmierern deutlich ihre Arbeit mithilfe von Bots erleichtern soll, die das Internet absuchen. Internet und Co erläutert, welche Rolle das Internet zukünftig spielen, wozu das Multifunktionsgerät Band dienen und was für Transport und Maschinen gelten könnte.

Die Mathematik widmet sich der euklidischen Geometrie, dem gerechten Verteilen, der Nichtstandardanalysis, der linearen Optimierung, unendlichen Mengen, der Topologie, der Zahlentheorie und der Zeitrechnung. Die Mengenlehre klärt, wie viele Elemente wichtige (un)endliche Mengen haben. Die Nichtstandardanalysis bietet neue Definitionen und (überarbeitete) Sätze, um genauere und bessere mathematische Aussagen zu erhalten.

Sie löst das Maßproblem. In der Topologie wird der (einfache) Zusammenhang von Mengen neu definiert. Die euklidische Geometrie stellt einige Axiome und Sätze infrage. Die lineare Optimierung beweist den Durchmessersatz für Polytope und stellt dem Simplexverfahren mit einer neuen Perturbationsmethode das meist polynomielle Intexverfahren gegenüber. Die Ratschläge beinhalten Ergebnisse aus meiner mathematischen Erfahrung.

Die Zahlentheorie gibt notwendige und hinreichende Kriterien sowie neue Beispiele für die transzendenten Zahlen an. Sie befasst sich mit der Littlewood- und der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung. Die Zeitrechnung stellt einen Kalender vor, dem das Achtersystem zugrunde liegt, und gibt Beispiele zu dessen Anwendung auf Längenangaben. Das Verständnis einiger Zusammenhänge erfordert Kenntnisse eines Mathematikstudiums.

Die Musik ist ausgelagert auf https://de.boris-haase.de/mus.

Die Physik geht theoretisch bzw. experimentell zwei neuen Universumsmodellen sowie im Rahmen von Jugend forscht 1983 den Periodendauern ausgesuchter Schwingungen von Massenpunkten in der Ebene nach, für die Näherungsformeln anhand von Krümmungsradius, Ausgangshöhe und rücktreibender Kraft ohne Integration angegeben werden. Zum Verständnis ist ein Studium von Mathematik oder Physik hilfreich.

Die Sitemap enthält auch eine Änderungshistorie; die Definitionen und das Glossar führen nur neue oder anders als üblich verwendete Ausdrücke auf. Und nun viel Vergnügen mit meiner Homepage!

(Es kommt nicht auf die Bilder und Animationen an: Von den Texten soll Ruhe ausgehen.)

Fragen und Antworten

Was folgt aus dem verschärften Primzahlsatz?

Er löst die vielen Probleme, die sich aus der ungültigen (allgemeinen) Riemannschen Vermutung ergeben.

Was bedeutet die Lösung des Maßproblems?

Jede Menge wird messbar. Die Maßtheorie kann auf σ-Algebren und Nullmengen verzichten und ist insgesamt einfacher.

Was leistet das Zentrumsverfahren?

Es löst lineare (Un-) Gleichungen und berechnet Eigenwerte und -vektoren in quadratischer Zeit.

Was bedeutet die Lösung des P-NP-Problems?

Alle (endlichen) nicht-deterministischen Probleme können deterministisch gelöst werden.

Was folgt aus der Gleichheit von offen und abgeschlossen?

Die Topologie wird einfacher: Beide stellen überflüssige Begriffe dar.

Welchen Vorteil bieten mittendliche Zahlen?

Sie schließen kontinuierlich den abrupten Übergang von endlichen zu unendlichen Zahlen.

Was leistet die neue Definition der transzendenten Zahlen?

Sie erlaubt sich auf (unendlich) rationale Zahlen zu beschränken und vereinfacht die Theorie.

Welche besondere Rolle spielen die natürlichen Zahlen?

Sie bilden die Basis für das Zählen der Elemente aller existierenden Mengen.

Was bewirken die neuen Operatoren prä und post?

Sie gestatten in der Analysis mit unregelmäßigen Abständen zu arbeiten und vereinfachen sie sehr.

Welche Rolle spielt das exakte Integral?

Es ist einfacher, genauer und allgemeiner gültig als die bisherigen Integral-Definitionen.

© 1983-2024 by Boris Haase

Informatik

Unter Internet und Co werden einige Aspekte des künftigen Internets behandelt: Wie können Prüfungen mithilfe des Internets durchgeführt werden? Wie kann eine jedem Menschen eindeutig zugeordnete (Nummer der) Identifikation, die ID, im Zusammenhang mit dem Internet sinnvoll verwendet werden? Welche Arten von Inhalten wird es im Internet geben? Wie können Informationsbenutzerprofile Suchprozesse im Internet vereinfachen?

Welche Aufgaben könnte ein Multifunktionsgerät namens Band erfüllen? Was kann moderne Kleidung (für Taubblinde) leisten? Wie lässt sich virtuelle Realität realisieren (in Räumen und im Gehirn)? Wie können Waren in Zukunft schnell transportiert werden? Welche Konsequenzen ergeben sich für Berufe in der Zukunft? Was muss bei intelligenten Maschinen künftig beachtet werden?

Programmieren mit Pfeil stellt eine zukünftige schnelle, mehrdimensionale und relationale Programmiersprache vor, die Programmierern deutlich ihre Arbeit erleichtern soll, indem sie mithilfe von Bots das Internet absucht und Programme in andere Programmiersprachen umsetzt, die für die individuelle Problemstellung besonders geeignet sind, und automatisiert und zertifiziert beweist und optimiert.

Unter Theoretische Informatik wird ein $\mathcal{O}(1)$-Sortieralgorithmus für nicht beschränkte Hardware vorgestellt. Die Organisation der Speicherplätze als Binärbaum ermöglicht bei n nacheinander gelesenen Eingabewerten das $\mathcal{O}(n)$-Verfahren Bitsort. Das Minimal- bzw. Maximalgerüst eines Graphen mit n Knoten wird in $\mathcal{O}(\log n)$ berechnet. Das Halteproblem wird neu positiv beantwortet und das P-NP-Problem gelöst.

Funkrechnen ermöglicht beim gleichzeitigen Funken auf verschiedenen Frequenzen paralleles Rechnen durch parallele Kommunikation jeder Speicherzelle mit jeder anderen. Damit lassen sich n Werte in $\mathcal{O}(1)$ sortieren, die Indizierung von Datenbanktabellen kann weitgehend entfallen. Vernetzung und Cloud Computing lösen mit Funktechnik diverse Probleme deutlich schneller als bisher.

Der Superrechner verfügt über besonders schnelle Zählleitungen, die bei der Addition bitweise eingesetzt und von Teilchen wie Photonen oder Elektronen in einem geeigneten Medium durchflossen werden. Sein hierarchischer Speicher ermöglicht schnelle Vergleiche und ist als Speicherkugel organisiert, die virtuell ein Speicherwürfel ist und in deren austauschbaren Zentrum sich die Wurzeln befinden.

Alle Probleme einer beliebigen (höheren) Welt lassen sich auf einen Schlag lösen, indem aus allen möglichen Lösungen die den Lösungskriterien genügenden unter Festhalten der Lösungsbildungen durch (vergleichendes) Sortieren herausgesucht werden. Die Gödelisierung macht substanzielle Vergleiche weitgehend entbehrlich. Folglich sind für Gott alle Probleme in derselben Komplexitätsklasse $\mathcal{O}(1)$.

Um die Bildung aller Möglichkeiten kommt Gott nicht herum, da entscheidende Probleme irreduzibel hinsichtlich der Komplexität sind. Für unsere (endliche) Welt bedeutet dies, dass in ihr entscheidende Probleme nicht lösbar sind. Das bedeutet jedoch nicht, dass wir die für uns wichtigen Probleme nicht lösen können, sondern nur, dass wir nicht alle wissenschaftlichen Fragen beantworten können.

Satz: Alle Probleme einer endlichen Welt können in $\mathcal{O}(1)$ gelöst werden.

Beweis: Bedingungen werden überprüft, indem wir den kompletten Lösungsraum in die Bedingungen auf einmal einsetzen, ggf. durch Parallelverarbeitung. Berechnungen werden beschleunigt, indem wir Rechenschritte zusammenfassen. Fortgesetztes Zusammenfassen liefert einen Gesamtrechenschritt. Daraus folgt die Behauptung, da sich jeder endliche Lösungsraum ebenso in einem Schritt aufbauen lässt.

Funkrechnen

Wie kann eine Speicherzelle mit möglichst vielen anderen durch Funkbausteine auf unterschiedlichen Frequenzen kommunizieren, um paralleles Rechnen zu unterstützen? Wie kann dadurch Sortieren von n Werten in $\mathcal{O}(n \log n)$ auf $\mathcal{O}(1)$ verbessert und damit die Indizierung von Tabellen in Datenbanken überflüssig werden?

Sendet jeder Funkbaustein (gleichzeitig) auf der Frequenz, die einem Wert der zugehörigen Speicherzelle entspricht, der in das kleinste positive natürliche und für alle Werte gültige Intervall transformiert wurde, dann empfangen die Gegenstellen diese neuen Werte in $\mathcal{O}(1)$ sortiert und können sie in $\mathcal{O}(n)$ ausgeben. Dies erfordert eine hierarchische Organisation als Binärbaum. Hierbei sendet erst der 0-Knoten und dann der 1-Knoten an den übergeordneten Knoten.

Ist der übergeordnete Knoten noch nicht besetzt, speichert er den Wert des 0-Knotens. Für jeden weiteren freien übergeordneten Knoten wird entsprechend verfahren und der 1-Knoten nachgezogen. Dies kann in insgesamt $\mathcal{O}(\log n)$ geschehen und ermöglicht damit eine Ausgabe aller Knoten durch Traversieren des so entstandenen Binärbaums in $\mathcal{O}(n)$. Das Anhängen einer Reihenfolgezahl in $\mathcal{O}(n)$ macht gleiche Werte zuerst verschieden.

Die Funkstrecken hängen nur von der Größe der Funkbausteine ab und der Funk darf von außen nicht gestört werden. Hier bieten sich schwache (ggf. abgeschirmte) Signale und ein vorgegebener Frequenzbereich an. Evtl. ist erst eine Realisierung in Rechenzentren vorzusehen, solange die Funkbausteine noch relativ groß sind. Da z. B. Cloud Computing zunimmt, stellt dies aber kein großes Problem dar.

Bei weniger Frequenzen als zu übertragenden Werten nutzen wir (optischen) Richtfunk oder verdoppeln die Anzahl der Sendedurchläufe für jedes weitere Bit. Sind die Frequenzwerte kleiner als die zu übertragenden Werte, so ist für jede Übersteigung um einen weiteren Frequenzbereich ein weiterer Sendedurchlauf für das Nachsortieren erforderlich. Ggf. sind für zusätzlich auftretende Werte Überlaufbereiche sinnvoll - etwa für Tabellenabfragen.

Ordnen wir die Funkbausteine in einer geraden Linie an und legen jeweils zwei dieser Linien kreuzweise übereinander, so können sie ohne Überschneidung senden, wenn sie gegenüberliegend befestigt werden. Dann kommen wir mit einer oder wenigen Frequenzen aus. In einer Abfrage lassen sich so $k + 1$ Tabellen in $\mathcal{O}(1)$ statt in $\mathcal{O}(n \log^k n)$ verknüpfen. Allerdings setzt die Notwendigkeit einer seriellen Abarbeitung dem parallelen (Funk-) Rechnen Grenzen.

Die Funktechnik kann auch benutzt werden, um paralleles Senden an parallele Addierwerke zu realisieren oder andere (lineare) Rechenoperationen wie etwa Vergleiche umzusetzen. Im Verbund lässt sich in Verbindung mit Netzwerken und schneller Datenübertragung (z. B. DSL) parallel rechnen - etwa um (lineare) Optimierungsaufgaben in linearer Zeit zu lösen. Auch assoziative Probleme lassen sich so parallel lösen - evtl. besser als im Gehirn.

Internet und Co

Prüfungen

Die Gewährleistung der Authentizität von Informationen erfordert geeignete Sicherungsmechanismen – etwa bei Prüfungen. Die Authentifizierung kann über biometrische Verfahren erfolgen. Als absehbar einzige preiswerte Lösungen eignen sich überwachte Computer. Unüberwachte Computer lassen sich leicht überlisten, da Mensch wie Computer unerwünschte Informationen einschleusen können.

Die überwachten Computer müssen in der Lage sein, mitgebrachte erlaubte Zusatzinformationen als solche zu erkennen, zu speichern und zur Nutzung anzuzeigen sowie den Zugang zum Internet gezielt zu unterbinden bzw. zu kanalisieren. Hierzu sind sowohl geeignete Standards als auch intelligente Überprüfungsmethoden zu entwickeln, wenn wir einen gewissen Komfort erreichen wollen.

Eine einfache Möglichkeit besteht darin, die erlaubten URLs für den Browser vorzugeben. Automatische Bilderkennungsverfahren, die unerwünschte Seiten herausfiltern können sollen, eignen sich nicht, da sich ggf. verschlüsselte Seiten evtl. nur aufwändig entschlüsseln lassen. Somit kommen nur Seiten in Frage, die eine feste unbestechliche Autorschaft und keine verborgenen Bereiche aufweisen.

Eine zuverlässige Kontrolle kann nur dann gewährleistet werden, wenn die Manipulation der Zuordnung von URL und Inhalt unmöglich ist (Vorsicht bei generischen URLs!). Geeignete Passwörter können mitgebrachte und vor der Prüfung entschlüsselte Zusatzinformationen (Prüfung im Internet) schützen. Das Customising der Programme für die Zusatzinformationen darf nicht zu viel Zeit beanspruchen.

Hierzu sollten sich Profile der Programme passwortgeschützt sicher speichern lassen, die dann nur noch einzulesen sind (setzt eine entsprechende Umsetzung der Programme voraus). Sollte sich das Internet so weit entwickeln, dass dort jedes Programm abrufbar ist, entfällt dieses Problem. Da Spezialkenntnisse in der Regel auch durch Spezialprogramme zu prüfen sind, handelt es sich um etwas Wünschenswertes.

Nicht über das Internet aufrufbare Programme lassen sich evtl. über geeignete kontrollierte Remoteverbindungen aufrufen, wobei Geschwindigkeit kein Problem ist. Schwieriger wird es, wenn die Prüfungssituation spezielle Hardware erfordert (z. B. in der Chirurgie). Es wird immer Prüfungen geben, die an einen bestimmten Ort gebunden sind. Die meisten sind jedoch an Standardgeräten realisierbar.

Um Kenntnisse aus gewissen Zeiträumen abzufragen, bietet sich ein von den Prüflingen zeitgleich zu beantwortender Fragebogen an, der zu verschiedenen Zeitpunkten variiert. Für das Bestehen kann ein pro Bereich evtl. unterschiedlicher Prozentsatz an richtigen Antworten gefordert werden. Multiple-Choice-Fragen erleichtern die Auswertung am Computer, solange die Spracherkennung Mängel aufweist.

Bei Prüfungen per Internet kann das automatisch ausgewertete Ergebnis unmittelbar nach Prüfungsende bekanntgegeben werden. Die Prüfungsmöglichkeiten und -gerechtigkeit setzen irgendwann das Internet voraus: Niemand kann zugemutet werden alles benötigte Wissen im Gedächtnis gespeichert zu haben. Die unersetzliche Leistung des Menschen liegt im kreativen und Informationen verknüpfenden Bereich.

Der Schutz der Persönlichkeit des Prüflings kann anonymisierte Prüfungen im Internet erfordern. Hierzu sollte die Prüfstelle im Internet Signaturen anbieten, mit denen sich der Prüfling nachträglich authentifizieren kann. Ferner sollte die Prüfstelle anonyme (temporäre) Emailkonten zum Einsehen des Prüfungsergebnisses durch den Prüfling mithilfe von Signatur und Passwort anbieten.

Email

Abstimmungen im Internet sind ebenfalls leicht möglich, wenn die Identität der Abstimmenden eindeutig geklärt werden kann. Jeder Mensch sollte bei Geburt ein kostenloses Emailkonto zugewiesen bekommen, an das alle Emails gesendet werden, die einer eindeutigen Authentifizierung bedürfen. Dieses Emailkonto hätte nach Sicherheitsaspekten sogar einen höheren Status als der Briefkasten.

Es könnte bis in das frühe Kindesalter von den Erziehungsberechtigten (mit-)verwaltet werden. Dazu müsste jeder Mensch im Bedarfsfall Internetzugang haben (ggf. in öffentlichen Behörden). Dort könnte all denjenigen bei der Bedienung geholfen werden, die damit Probleme haben. Die Bedienung muss in Zukunft sprachgesteuert möglich sein, ohne dass eine Tastatur verwendet werden muss.

Jedem Menschen sollte ferner bei Geburt eine weltweit eindeutige (Nummer der) Identifikation erhalten, die sich wie ein Name aussprechen lässt (s. Linguistik) und als solcher offiziell dient. Diese ID dient auch als Unterschrift und Signatur für wichtige Dokumente. Ihre eindeutige Generierung aus unveränderlichen biometrischen Daten ist überlegenswert. Einfacher ist die Abfrage in einer sicheren Datenbank.

Die konsequente Verwendung der ID ermöglicht das schnelle und zuverlässige Auffinden bestimmter Inhalte über die eigene Person im Internet. Mit zunehmender Verbesserung von Spamfiltern kann das bei Geburt vergebene Emailkonto eindeutig und für jede Person ermittelbar an die ID gekoppelt werden: z. B. [ID]@mail.world. Jedem Menschen sollte kostenloser Webspace zur Verfügung stehen.

Inhalte

Letzterer sollte z. B. unter www.[ID].net.world erreichbar und frei von unerwünschten Inhalten sein. Hierüber wachen von der künftigen Weltregierung bestellte AdministratorInnen. Jede Darstellung sollte aus Gründen der Verständlichkeit auch in der künftigen Weltsprache vorliegen. Für den offiziellen Teil kann ein verbindliches Profil vorgeschrieben werden. Auf einwandfreie Homepages darf verlinkt werden.

Personen, die keine eigenen Inhalte einstellen wollen, sind durch Minimalinhalte vertreten, wie sie z. B. in einem Personalausweis zu finden sind. Jeder Mensch ist über seine gespeicherten Daten und deren Ort aufzuklären. Bei der Erstellung eigener Inhalte sind die Behörden im Rahmen ihrer Möglichkeiten behilflich. Die Erfassbarkeit durch einen einheitlichen Fragebogen bestimmt den einforderbaren Inhalt.

Den Umfang der Minimalinhalte legt ein weltweit gültiges Gesetz fest. So ist z. B. eine Beschränkung auf Veröffentlichung von ID und Nationalität denkbar. Da die Nationalität in Zukunft angesichts der Weltbürgergesellschaft eine immer geringere Rolle spielt, ist durchaus vorstellbar, dass das Gesetz nur die ID als veröffentlichungspflichtig ansieht. Wir wissen dann nur, dass es diese ID gibt, aber nicht mehr.

Der Gleichheitsgrundsatz greift hier nicht, da jeder Mensch den Umfang seiner Darstellung in der Öffentlichkeit selbst bestimmen darf. Die Behörden dürfen zur Wahrnehmung ihrer Pflichten wesentlich mehr Daten zu einer ID speichern. Jeder Mensch kann nur im Rahmen der gültigen Gesetze verlangen die über ihn gespeicherten Daten einzusehen. Hinreichender Datenschutz ist immer zu gewährleisten.

Wer Daten auf www.[ID].net.world veröffentlicht, erteilt ausdrücklich seine Zustimmung zu ihrer Verwendung für alle legalen Zwecke. Dies schließt insbesondere die automatisierte Verarbeitung ein. Jeder Mensch ist darüber aufzuklären, was mit seinen Daten theoretisch und praktisch geschehen kann. Somit erhält er darüber ein umfassendes Bild und kann die Tragweite seiner Entscheidungen erkennen.

Das Recht auf freie Selbstdarstellung schließt ein, dass die veröffentlichten Daten nicht wahrheitsgemäß sein müssen. Dies sollte allen Menschen klar sein. Niemand kann eine Richtigstellung verlangen. Auch kann niemand verlangen, dass jemand die wahrheitsgemäßen, an anderer Stelle veröffentlichten Daten korrigiert, wenn dadurch die Persönlichkeitsrechte der Beschriebenen nicht verletzt werden.

Eine Person des öffentlichen Lebens kann sich in geringerem Umfang gegen Darstellungen ihrer selbst wehren, da das berechtigte Interesse der Öffentlichkeit mit ihren Persönlichkeitsrechten konfligieren kann. Ein Kern der Persönlichkeitsrechte bleibt aber immer unverletzbar, da die Würde des Menschen gewahrt bleiben muss. Näheres regeln die Gesetze der Weltregierung und soll hier nicht Gegenstand sein.

Eine Person darf unwahren Behauptungen über Tatsachen zu ihr mit einer Gegendarstellung begegnen. Diese ist auch im Internet unabhängig von ihrem Wahrheitsgehalt zu veröffentlichen. Es spielt dabei keine Rolle, wie oft die Homepage aufgerufen wird. Wird die Darstellung hinreichend korrigiert oder zurückgezogen, erlischt das Recht auf Veröffentlichung der Gegendarstellung.

Die Veröffentlichungsfreiheit erlaubt, dass Veröffentlichungen über eine beschriebene Person dieser nicht angezeigt werden müssen, da sie das Internet aufgrund ihrer ID nach Darstellungen ihrer Person leicht selbst durchsuchen kann. Möchte diese Person bekanntermaßen darüber informiert werden, so sollte diesem Wunsch durch Mailen an ihre Wunschemailadresse entsprochen werden. Das ist kein Aufwand!

Internetempfang sollte auch mobil möglich sein: über Satelliten oder hinreichend dicht verteilte Hotspots o. ä. Die Steuerung des Internets sollte über Sprache (Headset), Datenhandschuh bzw. Augenbewegungen

möglich sein. Den Monitor ersetzt eine halbtransparent zu schaltende Datenbrille (mit Prompter) mit evtl. unterschiedlichen Inhalten für jedes Auge – auch mit 3D-Darstellungen desselben Inhalts.

Im Internet können wir für uns oder andere Rundfunksendungen künftig selbst zusammenstellen. Wir können uns gezielt Nachrichten (von einer weiblichen, männlichen oder Kinderstimme) vorlesen lassen. Hierbei lässt sich die Stimme (etwa des Ehepartners) gezielt auswählen. Dies gilt auch für Musikstücke oder Pools. Die Kosten entsprechen in etwa denen von Hörfunk bzw. Fernsehen.

Fremde Programme können mit eigenen Sendungen kombiniert werden (Live-Schaltungen mit Mikrofon bzw. Webcam). Beispiele sind eigene Konzerte oder Schauspielaufführungen, Kunstausstellungen mit virtuellen Rundgängen und Erläuterungen, (gemeinsames) Karaoke, Werbesendungen für eigene Produkte, Workshops oder Konferenzschaltungen. Die Zukunft ist fast überall multimedial.

Die Entwicklung der Spracherkennung und der Übersetzungsprogramme macht bei sich verzögernder Einführung der weltweit einheitlichen Plansprache automatische Simultanübersetzungen über Internet vorstellbar. Je intelligenter die Programme sind, desto eher können sie Sprechfehler korrigieren und wenn nötig Erläuterungen einflechten. Internetusern bleibt vorbehalten, was sie zulassen oder initiieren.

Um Suchprozesse zu vereinfachen, wird die bestehende Idee der Crawler um (standardisierte) Informationsuserprofile erweitert. Letztere legen Userwünsche an eine Seite fest, auf die dann jede Seite durch entsprechende Abfragen eingehen kann, indem sie fast ausschließlich die gewünschten Inhalte anzeigt. Hierzu könnte z. B. die Programmiersprache PHP bzw. der Browser erweitert werden.

Für Webseiteninhalte wären dann intelligent Kategorien zu bilden, die sich abfragen ließen. Der Browser sollte in der Lage sein Inhalte, die über mehrere Seiten verstreut sind, auf einer Seite zusammenzufassen, um eine übersichtliche Darstellung zu erhalten. Konzepte der Ontologie sollten sinnvoll einbezogen werden (z. B. über Begriffe formulierte Abfrageregeln, die Browser bzw. PHP dann auswerten).

Die Vorteile dieses Vorgehens bestehen in der freien Festlegung von Kategorien, die nicht in der Seite vorkommen müssen und auch aus ganzen Sätzen bestehen können, und von evtl. komplexen Regeln, ohne die Suchzeit erheblich zu verlängern. Da Abfragen auf Suchen in (sortierten) Daten beruhen, sind letztere evtl. so abzulegen, wie es Theoretische Informatik und Bezugstheorie vorschlagen.

Band, Kleidung und virtuelle Realität

Tragbare Computer können mit dem sogenannten Band verbunden sein, das als Multifunktionsgerät mit integriertem einfachen Computer der Authentifizierung dient, wie eine Uhr getragen wird und deren Funktionen einschließlich Display-, Telefon- und Schlüsselfunktion übernimmt. Fast alle Funktionen des Bandes lassen sich durch Sprache oder Berührung jederzeit aktivieren oder deaktivieren.

Es funktioniert auch ohne Computeranbindung und ersetzt einen implantierten Chip. Wird es abgelegt, löst nach einer vorgebbaren Zeitspanne ein Alarm aus, wenn es nicht wieder in einer gewissen Weise aktiviert wird. Bestimmte Funktionen sollten beim Ablegen des Bandes aus Sicherheitsgründen immer deaktiviert sein. Der Alarm kann den integrierten Sender Nachrichten an Sicherheitskräfte senden lassen.

Wir können das Band auch per Black-Box-Funktion so einstellen, dass eine Aufzeichnung des Geschehens der letzten Stunden um uns herum erfolgt, die bei Eintreten eines Alarms oder auf unseren Wunsch hin versendet wird. Damit Kriminelle den Übertragungsprozess nicht stoppen können, bietet sich eine laufende und hinreichend schnelle (verschlüsselte) Übertragung an einen sicheren Computer an.

Da unsere Koordinaten ebenfalls übertragen werden, ist der letzte Aufenthaltsort vor einer eventuellen Entführung immer bekannt. Versionen des Bandes lassen sich auch als elektronische Fesseln einsetzen. Wir sollten uns genau überlegen, welche Funktionen des Bandes aktiviert oder deaktiviert sind, da viele Rückschlüsse auf unser Verhalten möglich sind – sei die Übertragung auch noch so sicher.

Moderne Kleidung kann auch zur Übertragung von Informationen dienen: So kann die Körperoberfläche Muster unterschiedlichen Drucks oder unterschiedlicher Temperaturen aufnehmen. Damit werden Bilder und Sprache leicht an Taubblinde übertragbar. Ist das Kleidungsstück mit einem Entfernungsmessgerät oder entsprechender Bilderkennungssoftware verbunden, kann sogar der Blindenstock entfallen.

Die Verbindung des Kleidungsstücks mit anderen Messgeräten ermöglicht die unauffällige Auswertung von Schadstoffkonzentrationen, Magnetfeldern und allem anderen, was als skalierte Substanz messbar ist bzw. von Programmen ausgewertet werden kann (z. B. Schwankungen in der Stimme oder der Haut oder des Blickkontakts des Gegenübers, die Hinweise auf bestimmte emotionale Zustände geben können).

Ist das Kleidungsstück programmierbar (mit Eingaben über Stimme, Berührung oder Auswertung der Blickrichtung), lassen sich die Messgrößen einfach wechseln, was immer wir messen wollen. Eine Verbindung mit Internet und Datenbanken erhöht das Informationsangebot noch einmal. Allerdings dürften auch die Preise mit den Anforderungen steigen – und bei hoher Stückzahl wieder fallen.

Der Weg zur virtuellen Realität kann in Räumen (CAVE) neben Projektionsverfahren auf geeignet beschichtete Oberflächen auch über programmierbare und steuerbare (s. o.) Tapeten führen. Hierbei ermittelt ein Rechner das zu projizierende Bild bei im Raum vorhandenen Gegenständen (Verzerrungsausgleich). Es lassen sich sogar 3D-Effekte erzielen (höhere Dimensionen als Projektion).

Die Raumflächen können für unterschiedliche Inhalte aufgeteilt und einzeln angesprochen werden. Die eingeschränkte Fähigkeit des Menschen zur Parallelverarbeitung setzt dabei allerdings Grenzen. Solange er kein Cyborg ist, bleibt er auf Rechnerhilfe angewiesen. Direkte Einflussnahme auf das Gehirn ist deswegen so reizvoll, da Eindrücke nicht materiell (Sinnesorgane) vermittelt werden müssen.

Transport und Maschinen

Für die schnelle und zuverlässige Warenauslieferung ab Lagern und Sammelstellen, eignen sich z. T. unterirdische Schnellverbindungen. Das Warenvolumen beträgt höchstens 0,125 Kubikmeter $(0{,}5\ \mathrm{m})^3$, größere Waren müssen evtl. langsamer transportiert werden. Computer berechnen eine optimale Netzauslastung und Kollisionsvermeidung. Sie informieren das Technikpersonal über aufgetretene Staus.

Transportart könnte bspw. Magnetschwebetechnik in Kombination mit Vakuumtunneln sein. Die Waren können an gut erreichbaren Versandstellen abgeholt und aufgegeben werden. Ein Transport (mit einer anderen Technik) bis in die Haushalte ist vorstellbar. An den Sammelstellen können z. B. Nahrungsmittel zentral zubereitet werden. Die Zentralisierung erfüllt auch ausgefallene Wünsche.

Die einzelnen Behälter für den Transport können stromlinienförmig sein. Integrierte Chips steuern das unbemannte System. Zwischen Bestellung und Auslieferung vergehen nur wenige Minuten. Die Transportgebühren betragen bei gut gefüllten Behältern einen Bruchteil des Warenwerts: Autofahren sollte teurer sein. Viele Berufe von heute werden Roboter oder Computer übernehmen.

Der Mensch bleibt nur gefragt, wo komplizierte Gespräche mit Menschen anfallen, wo kreative Leistung, jahrelange Erfahrung und Spezialkenntnisse gefragt sind und wo komplex organisiert und koordiniert werden muss. Körperliche Arbeit und alles, wofür sich Regeln aufstellen lassen, ist anfällig für Ersatz. Unsere Welt wird mit deutlich weniger Menschen bei stark steigenden Bedürfnissen zu verwalten sein.

Mensch und Maschine werden sich immer ähnlicher, bis sie verschmelzen. Der Mensch wird sterben, wenn er es will: um in die Folgewelt zu gelangen – zu einem Zeitpunkt, den er gewählt hat. Tödliche Unglücke werden weiterhin auftreten – aber seltener. Es wird sich die Frage nach der Herrschaft der Maschinen stellen: hierzu wird der Mensch allerdings eine Lösung finden müssen oder er geht unter.

Eine Lösung heißt Kontrolle und Überwachung. Programme müssen die Informationen in einer Maschine ständig überprüfen. Bestimmte Funktionen dürfen dort nicht deaktiviert werden, ohne dass die Maschine selbst deaktiviert wird. Damit geht in bestimmten Bereichen ein Kodierungsverbot einher. Alternativ muss eine Kodierung von bestimmten Programmen simultan dekodiert werden können.

Maschinen benötigen eine zentrale, fälschungssichere und turnusmäßig zu erneuernde Zulassung, die sich jederzeit überprüfen lässt – wie der Gesamtstatus der Maschine. Einfachere Überprüfungen müssen durch BesitzerInnen und Polizei möglich sein, komplexere dürften wohl SpezialistInnen vorbehalten bleiben. Gesetze gegen Kriminalität durch Maschinen sind zu erlassen und die Haftung ist zu klären.

Programmieren mit Pfeil

Die zukünftige Programmiersprache Pfeil wird hier vorgestellt, deren Name einerseits auf ihre relationalen Grundlagen und andererseits auf ihre Geschwindigkeit („pfeilschnell“) verweist. Sie setzt modernste Konzepte ein, denn sie ist multilingual (die Codewörter werden einer bspw. englischen Vorgabe gegenübergesetzt), unicodefähig, visuell (Beziehungen werden im mehrdimensionalen Raum dargestellt, die sich nicht unbedingt leicht linearisieren lassen), deklarativ und funktional (es wird KI zur Codeoptimierung eingesetzt).

Die für das jeweilige Programmierprojekt tatsächlich verwendete Umsetzung richtet sich nach der individuellen Problemstellung und braucht nicht (!) eigens festgelegt zu werden. Pfeil ist ferner in der Lage aus der Problemstellung sowohl eine schnelle als auch eine nicht unbedingt identische elegante Umsetzung für Darstellungszwecke zu generieren. Übersetzungen in eine beliebige für das jeweilige Problem umsetzbare Programmiersprache sind automatisiert möglich einschließlich der gewählten Notation.

Pfeil ist in eine Entwicklungsumgebung integriert, die über ins Internet ausschwärmende Bots verfügt, um besonders effiziente Programme zu beschaffen, wenn diese entsprechend freigegeben sind. Diese werden weitestgehend nach den Vorgaben des Programmierers überprüft, wobei dieser eine bestimmte Zertifizierung verlangen oder angeben kann, dass auch kostenpflichtige Programme verwendet werden, weil z. B. bestimmte Qualitätsanforderungen (des Auftraggebers oder der Gesetze) zu erfüllen sind.

Hierzu werden gewisse Standards eingeführt, denen (Pfeil-) Programme genügen müssen, um Schäden zu vermeiden. So ist z. B. zu verlangen, dass die Haftungsfrage eindeutig geklärt ist, da ein Automatismus schwer zur Verantwortung gezogen werden und ab einer gewissen Programmkomplexität die Beweislage schwierig sein kann. Pfeil kann (ggf. durch Hinzufügen einer Zeitachse und KI) sowohl als Auszeichnungssprache (zu Dokumentationszwecken) wie als echte Programmiersprache verwendet werden.

Automatisches Beweisen erleichtert die Umsetzung in andere Programmiersprachen und ermöglicht auch Ergebnisse, die in der Informatik bzw. Mathematik Bestand haben. Die Nachvollziehbarkeit ist durch das Herunterbrechen bis auf einfachste Zusammenhänge gegeben. Der Einsatz von KI ermöglicht das Speichern von optimierten Codestrecken, deren Parameter durch maschinelles Lernen ermittelt sein können. Pfeil erlaubt verteiltes Rechnen, indem Ressourcen individuell erschlossen und genutzt werden.

Das Bindeglied zwischen verschiedenen Entitäten ist der eine Beziehung ausdrückende Pfeil: so lassen sich m:n-Beziehungen nicht nur leicht und elegant notieren, sondern auch effizient implementieren. Pfeil ist eine Programmiersprache, die tatsächlich Arbeit abnimmt, indem ein Programmierer nicht mit Details belastet wird, die er nicht versteht, aber sich bspw. aus maschinellem Lernen ergeben. Er kann zwar selbst optimieren, aber die für Pfeil eingesetzten Rechner haben ihm zu viel an Effektivität voraus.

Pfeil gibt dem Programmierer nützliche Hinweise wie seine Programmierung aussehen muss, indem vergleichbare Problemstellungen automatisch gesucht und vorgeschlagen werden. Die Beziehungen erlauben eine informatische Darstellung des Anschauungsraums, der ein immer komplexeres maschinelles Verstehen ermöglicht. Konzepte der Quantenprogrammierung können genauso selbstverständlich umgesetzt werden, da Pfeil mit allen nicht zu seltenen Hardwarerealisierungen umgehen kann.

Pfeil kann besonders gut mit mehrläufigen Prozessen umgehen: aus einer einfachen Eingabe werden optimierte Abfolgen errechnet, bei denen sich der Programmierer nicht um die Details kümmern muss, aber aus der von Pfeil erzeugten Ausgabe entnehmen kann, inwieweit sein Programm korrekt ist bzw. wo noch Verbesserungen nötig sind. Diese könnte Pfeil nur wissen, wenn die Intentionen des Programmierers eindeutig wären. Beispiele sind hier Netzwerkflüsse, Optimierungs- und Transportprobleme.

Menschen können parallele Programmierung nicht leicht umsetzen, da hier so viele Bedingungen zu berücksichtigen sind, dass dies meist nur ausgesprochene Spezialisten vermögen. Pfeil hingegen kann auf vorgefertigte Grundgerüste zurückgreifen, die es mithilfe von KI anpasst. Hierbei ist weniger an einfache als an komplexe Modelle gedacht, die ein Mensch kaum durchschauen kann. Auch dabei ist deutlich auf die moralische Integrität der Menschen zu verweisen, weil sich sonst viele Nachteile ergeben können.

Diskussion: Pfeil ist insofern nötig, als die Welt immer komplexer wird und deren Zusammenhänge das menschliche Fassungsvermögen sowie die Vorstellungskraft übersteigen. Ferner werden die Probleme immer größer und sind von Einzelnen nicht mehr zu lösen. Insgesamt wird der Lösungsprozess für die

Menschen immer unbefriedigender und macht die Welt immer weniger lebenswert. Optimistisch gesehen bleibt Pfeil damit für die Menschen eine der wenigen Auswege aus dem bisherigen Unheil.

Superrechner

Welche Eigenschaften sollte ein Superrechner haben, der besonders schnell ist? Wie sollte sein Speicher aufgebaut sein? Inwieweit weicht er von herkömmlichen Rechnerarchitekturen ab? Wie kann dies an den Beispielen der Grundrechenarten und der Matrizenmultiplikation verdeutlicht werden?

Im Folgenden wird mit einer Bit-Länge von 64 gerechnet. Diese kann in der Praxis aber höher sein. Grundlage sind u. a. besonders schnelle Zählleitungen, die bei der Addition bitweise eingesetzt werden. Eine Zählleitung wird z. B. von Teilchen wie Photonen oder Elektronen in einem geeigneten Medium durchflossen, auf das es hier aber nicht ankommt, da nur das theoretische Konzept geschildert wird. Diese zählen die Anzahl gesetzter gleichwertiger Bits von mehreren aneinander liegenden Binärzahlen.

Entscheidend ist die hohe Geschwindigkeit der Teilchen. Die 64 Anzahlen pro Bit werden wieder als Binärzahlen gespeichert und (bitweise verschoben) addiert. Da dies parallel geschieht, wird eine Additionsgeschwindigkeit von 2^{32} Binärzahlen mit Bit-Länge 32 in $\mathcal{O}(1)$ erreicht. Subtraktionen werden über das Zweierkomplement realisiert. Fortgesetzte Addition ermöglicht Multiplikation und über die Inversenbildung die Division. Ein hierarchischer Speicher ermöglicht schnelle Vergleiche (s. Funkrechnen).

Zur schnellen Multiplikation zweier o. B. d. A. quadratischer Matrizen mit jeweils 2^n Einträgen für $n \in {}^{\nu}\mathbb{N}$ werden diese durch simultane Replikation (d. h. gleichzeitiges Versenden und Speichern) in eine Speicherkugel geschrieben. In deren Knoten, in denen beide Einträge von jeweils einer Matrix gespeichert ist, findet die Multiplikation in $\mathcal{O}(1)$ statt. Anschließend werden die Einträge einer Zeile wie oben geschildert über Zählleitungen parallel in $\mathcal{O}(1)$ addiert, was die Ergebnismatrix berechnet.

Hierbei befindet sich die Wurzel in der innersten Schale, deren Blätter in der nächstäußeren Schale usf. Die Schalen sind drehbar gelagert, um Abnutzungs- bzw. Überanspruchungseffekten der innersten Knoten vorzubeugen. Die Kontakte (Pins) befinden sich in ebenfalls drehbar gelagerten eigenen Schalen. Die Speicheradressen werden verwaltet wie in einem virtuellen Speicher, der rechnerisch auch einem Speicherwürfel entsprechen kann. Von Zeit zu Zeit werden die Schalen gedreht, auch bei Ausfällen.

Das vorgestellte Speicherkonzept ist ebenfalls für andere Hardwarekomponenten geeignet wie Festplatten. Es ermöglicht kürzere Wege als das herkömmliche. Dies ist vorteilhaft für die Indizierung von Datenbanktabellen, Schwarmerkundungen und Threads. Die austauschbare kugelförmige Wurzeleinheit ist mehrfach redundant ausgelegt, um ein vernünftiges Ausfallkonzept zu haben. Um an sie von außen zu gelangen, lässt sich der Speicher aufklappen. Von der jeweiligen Wurzel geht je ein Speicherbaum aus.

Insgesamt ist so (virtuell) ein einziger Speicherbaum adressierbar (sogenannte *Speicherdualität*). Dies erlaubt schnelle Sortierverfahren wie Bitsort (s. Theoretische Informatik). Dazu sind die Speicherzellen eventuell als einfachere Prozessoreinheiten mit eigener Intelligenz zu realisieren. Aus technischen oder rechnerischen Gründen können sie auch doppelt ausgelegt sein. Dieses Konzept kann in reduzierter Form bei PCs verwendet werden. Auf jeden Fall ergibt sich ein deutlicher Geschwindigkeitsgewinn.

Theoretische Informatik

Das Folgende setzt die Mengenlehre voraus und beantwortet für $k, m, n \in {}^{\mathrm{v}}\mathbb{N}$ die Fragen: Wie lassen sich $n = \epsilon^{\sigma} \leq k^{m}$ im Stellenwertsystem zur Basis k kodierte Werte in $\mathcal{O}(1)$ sortieren? Wie lassen sich zwei Matrizen $\in {}^{\mathrm{v}}\mathbb{R}^{n \times n}$ in $\mathcal{O}(\sigma)$ multiplizieren? Wie lässt sich das Minimal- bzw. Maximalgerüst eines Graphen mit n Knoten in $\mathcal{O}(\sigma)$ berechnen? Was ist die Antwort auf das Halteproblem? Warum gilt $P = NP$?

Sei der Speicher teilweise in Form eines Binomial-Baumes der Ordnung k mit $\mathrm{k}^{\dot{\mathrm{m}}}$ Speicherplätzen organisiert, wobei $\mathrm{k}^{\dot{\mathrm{m}}} = 2^{h}$ mit $h \in {}^{\mathrm{v}}\mathbb{N}$ gelte. Jeder Speicherplatz sei in der Lage einen zu sortierenden Wert komplett aufzunehmen und jeder Kante entspreche eine Datenleitung. Ein fortlaufend mehrfachen Werten angehängter Index bildet zusammen mit dem alten Wert den neuen. Jeder j-te Zwischenknoten korrespondiert hierarchisch mit der j-ten Stelle zur Basis k des zu sortierenden Wertes.

Speichern die Blätter statt der Werte deren Adressen (in einem Schritt) lassen sie sich (in einem weiteren) sortiert in die Wurzel zurückholen. Hierbei werden sie maximal so weit in den Baum geschoben, bis sie sich trennen. Geht ein Wert durch einen Zwischenknoten, setzt dieser sein Bit auf 1, aber auf 0, falls der Zwischenknoten keinen auszulesenden Nachfolger hat. Die Sortierreihenfolge bestimmt den ersten Wert. Speichern, Nachfolger prüfen, Bits maskieren und auslesen dauert $\mathcal{O}(n)$.

Hier und im Folgenden wird eine Speicherarchitektur mit autonomen Speichereinheiten verwendet, die über einfache rechnerische Möglichkeiten verfügt. Sie lässt sich auch durch zusammengeschaltete verteilte Rechner simulieren. Die Komplexität erhöht sich durch Einsortieren eines zusätzlichen Wertes um $\mathcal{O}(\sigma)$, da dies einer binären Suche entspricht. Sie ist antiproportional zur Anzahl der Baumknoten im Speicher. Das Verwenden von $d \in {}^{\mathrm{v}}\mathbb{N}$ Datenleitungen verringert sie um den Faktor $\tilde{\mathrm{d}}$.

Belegen die Werte das g-fache eines Speicherplatzes, erhöht sie sich um den Faktor g. Enthält der Speicher keinen Binomial-Baum der Ordnung k, erhöht sie sich um den Faktor ${}_{k}n$, weil jeder Zwischenknoten zu einem Wert zu lesen ist. Ein anderweitiges Nutzen der ersten k^{p} Speicherplätze mit $p \in {}^{\mathrm{v}}\mathbb{N}$ erfordert ein Durchsuchen aller Zwischenknoten der p-ten Stufe. Die Komplexität erhöht sich bei gut gefülltem Speicher marginal, andernfalls um den Worst-Case-Faktor $\mathcal{O}(k^{p})$.

Die zu multiplizierenden Matrizen sind so quadratweise je n-fach in einem Speicherwürfel abzulegen, dass jede Speichereinheit zwei Werte multipliziert und jeder Eintrag der Produktmatrix als Summe mit n Summanden in $\mathcal{O}(\sigma)$ bestimmt wird (Vektorrechner). Matrixmultiplikation lässt sich auch über adressierte schwärmende Einträge realisieren. Tensorprodukte lassen sich effizient durch n-Speicherwürfel abbilden, die durch entsprechende Datenleitungen im dreidimensionalen Raum verbleiben.

Der optimale Sortieralgorithmus *Bitsort* sortiert stabil mit der Zeitkomplexität $\mathcal{O}(n)$ und benötigt $\mathcal{O}(n)$ zusätzlichen Speicherplatz. Voraussetzungen: Je zwei Werte liegen als Bitfolge vor, lassen sich in $\mathcal{O}(1)$ vergleichen und ebenso deren sämtliche Bits abarbeiten. Ferner sei der Speicher teilweise als Binärbaum realisiert und der Weg von Wurzel bis Blatt kann ebenfalls in $\mathcal{O}(1)$ durchlaufen werden.

Ist $p \in {}^{\mathrm{v}}\mathbb{N}$ die Anzahl der parallelen Schritte für paralleles Bitsort, so ist die Zeitkomplexität $\mathcal{O}(\tilde{\mathrm{p}}n)$. Jedes Einfügen in den stets sortierten Baum bzw. Ausgeben eines Wertes hat die Zeitkomplexität $\mathcal{O}(1)$. Der Speicher sei mit folgender Intelligenz versehen: Jeder Baumknoten speichert den ihn erreichenden Wert selbständig und kann ihn an den nächsten Baumknoten weitergeben, wenn er schon besucht wurde, bzw. andernfalls seine Adresse an die Zentraleinheit zurückgeben. Der Wurzel entspricht kein Bitwert.

Begonnen wird bei dem höchstwertigen Bit eines Wertes. Jedes seiner nacheinander abgearbeiteten Bits bestimmt den nächsten Knoten innerhalb des Binärbaumes. Wurden alle Bits abgearbeitet oder ergibt sich ein Unterschied zum verglichenen Bit und wurde der zugehörige Knoten noch nicht besucht, speichert der folgende Knoten ggf. die nicht im Baum liegende Adresse der restlichen Bitkette des Wertes bzw. die Anzahl der Werte für diesen Knoten bei unerheblicher Reihenfolge gleicher Werte.

Die Zeitkomplexität aller Verfahren, die Werte mit einer Bitlänge $b = qa \in {}^{\mathrm{v}}\mathbb{N}$ bei Adresslänge $a \in {}^{\mathrm{v}}\mathbb{N}$ sortieren, erhöht sich pro Wert von $\mathcal{O}(1)$ auf $\mathcal{O}(q)$. Ist r der Durchschnittswert von q, ist in der Zeitkomplexität des Sortierverfahrens mindestens ein $\mathcal{O}(n)$ durch $\mathcal{O}(rn)$ zu ersetzen. Ist $s \in {}^{\mathrm{v}}\mathbb{N}$ die durchschnittliche Anzahl der verschiedenen (!) Werte, die in einem Bucket nach Sortierung bis Bitlänge a landen und deren Bitlänge größer als a ist, so beträgt die Zeitkomplexität des Verfahrens $\mathcal{O}((_{\epsilon}s + r)n)$.

Dabei werden die erwähnten Werte eines Buckets pro Bucket in einem AVL-Baum abgelegt oder in einem B-Baum bei Ablage in einem zum Hauptspeicher relativ langsamen externen Speicher. Dort wird jeweils nur mit dem signifikanten Teilwert der Adresslänge eines Wertes gearbeitet. Der Verzicht auf vollständig sortierte Werte nach jedem Abarbeiten eines Wertes reduziert die komplette Sortierung durch Verwendung von zwei Hauptspeicherbereichen zeitlich auf $\mathcal{O}(rn)$.

Der zweite Hauptspeicherbereich wird nach jedem Durchlauf gelöscht, um für den nächsten Durchlauf zur Verfügung zu stehen, bis ein Bucket abgearbeitet ist. In den ersten Hauptspeicherbereich werden stets nur die Adressen in der aktuellen Sortierreihenfolge zurückgeschrieben, bevor die Werte mit gleichem soeben abgearbeitetem Teilwert weiter sortiert werden. Für den schnellen Zugriff auf jeden Teilwert ist jeder Wert zusammenhängend im Speicher abzulegen.

Die Verwendung des $\mathcal{O}(rn)$-Verfahrens für die Stammdaten und des $\mathcal{O}((_{\epsilon}s + r)n)$-Verfahrens für die Bewegungsdaten kombiniert beide gut. Damit lassen sich insbesondere schnell Tabellenindizes anlegen. Bei umfangreichen Tabellen macht es einen deutlichen Unterschied, ob ein Index in $\mathcal{O}(rn)$ statt in $\mathcal{O}(r\sigma n)$ angelegt wird und sich dann ein Wert durchschnittlich in $\mathcal{O}(_{\epsilon}s + r)$ statt in $\mathcal{O}(\sigma + r)$ oder schlechter suchen lässt. Sortieren durch Mischen sortierter Listen ist ebenfalls in $\mathcal{O}(rn)$ möglich.

Diskussion von Bitsort: Es ist unter den angegebenen Voraussetzungen optimal sowie für die parallele Programmierung, den schnellen laufenden Aufbau von Tabellenindizes in Datenbanken und die Suche darin gut geeignet. Seine Hardwareimplementierung ist eher ungewöhnlich.

Sei $n \in {}^{\nu}\mathbb{N}$ die Anzahl der Knoten eines endlichen schlichten zusammenhängenden Graphen. (Ist er nicht schlicht, lässt ein Aussortieren in $\mathcal{O}(n)$ nur die kleinste parallele Kante und keine Schlingen zu. Ist er nicht zusammenhängend, werden in $\mathcal{O}(n)$ alle isolierten Knoten entfernt.) Bei Ausschluss negativer Gewichte benötigt der Algorithmus von Dijkstra $\mathcal{O}(n)$ Schritte für jeden minimalen Weg in dem Graphen, da Sortieren sowie paralleles Addieren und Vergleichen in $\mathcal{O}(1)$ möglich ist.

Dessen Minimal- oder Maximalgerüst lässt sich in $\mathcal{O}(\sigma n)$ oder gar in $\mathcal{O}(\sigma)$ berechnen. Die Kanten eines Knotens lassen sich parallel in $\mathcal{O}(n)$ bzw. $\mathcal{O}(1)$ sortieren. Seien alle Kanten zu Beginn weiß gefärbt. Jeder Knoten hängt die kleinere und dann die größere Zahl der beteiligten Knoten der Kante mit dem kleinsten Gewicht aller weiß gefärbten Kanten, die von ihm ausgehen, an dieses Bit für Bit als Wert an. Er speichert den kleinsten Wert, der ihn erreicht. Dies ist in $\mathcal{O}(n)$ bzw. $\mathcal{O}(1)$ möglich.

Das Schwarzfärben der Kanten zwischen jeweils zwei Knoten desselben Minimalgerüsts benötigt maximal die gleiche Zeit. Jeder Knoten hat dann einen nächsten Nachbarknoten. Ein Fortfahren mit den weiß gefärbten Kanten in $\mathcal{O}(\sigma)$ Schritten kann den kleinsten Wert eines Minimalgerüsts in $\mathcal{O}(n)$ bzw. $\mathcal{O}(1)$ bestimmen, bis das gesamte Minimalgerüst in $\mathcal{O}(\sigma n)$ bzw. $\mathcal{O}(\sigma)$ entstanden ist. Für ein Maximalgerüst werden alle Kantengewichte von einer hinreichend großen Konstanten subtrahiert.

Haltesatz: Um ein festes r_m der Zahl $0{,}r_1r_2...r_m$ zu erreichen, hält ein Programm für beliebige (Pseudo-) Zufallszahlen $r_j \in {}^{\nu}\mathbb{N}$ mit $k \in {}^{\nu}\mathbb{N}^*$ Stellen und Basis $p := 2^k$ in $m \in \mathbb{N}^*$ Schritten mit der Wahrscheinlichkeit $\tilde{p}$.

Beweis: Dies ist ein optimales Ergebnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung (vgl. [973], S. 10 - 40).□

Bemerkung: Zufall ist unentscheidbar. Damit existieren Programme, die mit beliebiger Wahrscheinlichkeit halten, und es folgen die Gödelschen Unvollständigkeitssätze. Der Gödelsatz "Ich bin nicht beweisbar." ist insofern sophistisch, als er das Scheinargument Petitio Principii ex negativo aufweist. Um das Halteproblem zu lösen, ist ein Selbstbezug unsinnig, der ein Halten gleichzeitig gebietet und verbietet. Die Selbstreferenz macht das Diagonalargument für das Halteproblem unzulässig.

Satz: Ist $\mathcal{L}$ die Menge aller Typ-0-Sprachen $\mathcal{L}_k$ aus endlichen Wörtern mit Maximallänge ν für mittendliches $|\mathcal{L}| = 2^{(\nu^{\nu+1}-1)/\acute{\nu}}$ (unter Anwendung der GR) und $k \in \{1, ..., |\mathcal{L}|\}$, gilt $P = NP = \mathcal{L}$.

Beweis: Da sich jede deterministische Turingmaschine auch als nichtdeterministisch auffassen lässt (vgl. [972], S. 162, 318 und 361 f.), gilt $P \subseteq NP$. Es enthält P alle linearen Sprachen $\mathcal{L}_k$ und NP nur solche.□

Mathematik

Die im Folgenden erzielten Ergebnisse in den Teilgebieten Mengenlehre, Topologie, Nichtstandardanalysis, Zahlentheorie, lineare Optimierung, wissenschaftliches Rechnen, euklidische Geometrie und theoretische Informatik sind außergewöhnlich! Bekannte Aussagen und grundlegende im Folgenden nicht definierte Begriffe wie Axiom, Körper usw. werden wie in der einschlägigen Literatur oder bei Wikipedia beschrieben vorausgesetzt. Daher werden hier nur abweichende oder klarstellende Definitionen gegeben.

Eingeklammerte Satzteile können abweichend vom herkömmlichen Gebrauch der näheren Erläuterung entweder stehen oder nicht: beide Bedeutungen sind gültig. Beweise werden mit $\square$ abgeschlossen und Definitionen mit $\triangle$. Die Endlichkeit der Welt bereitet der Behandlung des Unendlichen gewisse Schwierigkeiten. Der größte Exponent des Arguments eines Polynoms ist sein Grad. Minimalpolynome lassen sich mit ganzzahligen Koeffizienten (statt rationalen) wie durchweg im Folgenden angeben.

Vorüberlegung: Ein Bezug auf philosophische Begriffe ist berechtigt, da sich Mathematik metasprachlich nicht allein aus sich selbst erklären lässt und Abstrakta nach dem Prinzip der Wissenschaftlichkeit die allgemeinsten Aussagen liefern. Das Wort sukzessive beinhaltet hierbei die physikalische Vorstellung, dass die Zeitspanne zwischen aufeinander folgenden Zeitpunkten postulierbar, messbar bzw. in irgendeiner Form wahrnehmbar ist. Sie entspricht in dieser Welt der Planck-Zeit von ca. 10^{-43} Sekunden.

Dem Vorwurf der mangelnden Allgemeingültigkeit durch Einbeziehen physikalischer Tatsachen ist zu entgegnen, dass das Unendliche als dualer Begriff zum Endlichen nur durch einen nicht abschließbaren Prozess oder ein räumliches Pendant erklärt werden kann, die Gegenstücke des Instanten bzw. desselben Ortes sind. Aufgrund der strukturell ähnlichen und in der Raumzeit zusammengefassten Größen Raum und Zeit, gilt das für den Raum weiter unten Gesagte auch für die Zeit.

In der Praxis (der Informatik) helfen oft hinreichend kleine formale Systeme. Der schwer vermittelbare abrupte Übergang von endlichen zu unendlichen Zahlen erfordert mittendliche. Die Existenz aktual oder nur potenziell unendlicher Mengen bleibt offen, da die Transzendenz des Unendlichen einen Beweis versagt. Aus der fast „verschwenderischen" Größe bzw. Expansion des Universums lässt sich auf eine Verfügbarkeit des Seienden schließen, der keine erkennbaren Grenzen gesetzt sind.

Solche Schlüsse sind allerdings schwächer als die Abduktion. Wird eine endliche Strecke in unendlich viele Teile zerlegt, liegt das Unendliche endlich begrenzt vor. Ist darüber hinaus die Anzahl der Teile beider Unendlichkeiten *gleich*, liegt mathematisch eine Isomorphie vor: Die Vergrößerung der unendlich kleinen Teile der endlichen Strecke auf endliche Strecken ergibt im größeren Maßstab die Unendlichkeit im herkömmlichen Sinne bezogen auf das Gesamte. Dies erschließt leicht eine Bijektion im mathematischen Sinne.

Rationale Zahlen sind reell, setzen ein Minimalpolynom vom Grad 1 auf 0 und haben zum Teil periodische Nachkommastellen. Ist der Grad ≥ 2, handelt es sich um rein algebraische Zahlen mit unendlichen Zählern und Nennern. Endliche reelle Brüche bilden mit den unendlichen bzw. rein komplexen Brüchen bereits alle reellen bzw. komplexen Zahlen. Nicht als endlicher Bruch abbrechende reelle Kettenbrüche sind algebraisch (herkömmlich transzendent!), da sie einen unendlichen Nenner besitzen.

Die Algebra lehrt, dass Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier herkömmlicher algebraischer Zahlen von natürlichem Grad m bzw. n algebraisch maximal vom Grad mn sind und die $1/m$-te Potenz einer herkömmlichen algebraischen Zahl vom Grad n ebenfalls algebraisch maximal vom Grad mn ist. Ist die Algebraizität einer Zahl zu untersuchen und der Rest durch den Grenzwert einer Nullfolge (a_n) gegeben, ist das Weglassen der Folgenwerte für große n nicht erlaubt. Sie sind entscheidend.

Da alle reellen Zahlen näherungsweise endliche Zahlen sind, lassen sie sich in Echtzeit berechnen. Eine unendliche reelle Zahl kann aus einem endlichen Kettenbruch bestehen mit unendlich großem letztem Nenner. Würde sie einer herkömmlich rationalen Zahl gleichgesetzt, indem der letzte Teilbruch entfernt würde, so wäre sie gleichzeitig Lösung einer linearen Gleichung mit (unendlichen) ganzen Koeffizienten.

Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz erlauben Summen bei korrektem Rechnen (mit den Landau-Symbolen) beliebig umzusummieren. (Endliche) Definitionen eignen sich besser als Axiome: Sie bieten deutliche Handhabungsvorteile und sind traditionell. Die Mengen der natürlichen, ganzen, reellen und komplexen Zahlen sind nicht abgeschlossen. Der Minimalitätssatz erklärt die Wahl von 2 als Basis (auch für am häufigsten im Binärsystem arbeitende Digitalrechner).

Die korrekte Behandlung von Bijektionen ergibt, dass anzahlmäßig zwischen der Menge der herkömmlich natürlichen Zahlen und der der herkömmlich reellen Zahlen unendlich viele Mengen liegen. Die Definition der reellen Zahlen durch Dedekindsche Schnitte oder Äquivalenzklassen von reellen Cauchy-Folgen ist überflüssig. Damit erhält die Kontinuumshypothese eine neue Antwort. Die Mengenlehre insgesamt ist natürlich umfangreicher, da hier nur wesentliche (neue) Gedanken präsentiert werden.

Eine Kreisscheibe ohne ihren Rand stellt herkömmlich eine offene Menge dar, weil dann jeder Punkt von ihr eine herkömmliche Umgebung hat, die ganz in dieser Menge liegt. Werden nacheinander die Punkte auf einer Halbgeraden vom Kreisscheibenmittelpunkt bis zum Rand betrachtet, muss es auf dieser Halbgeraden hin immer eine echte Umgebung für jeden Punkt geben.

Diese bisherige Vorstellung negiert jedoch "das Ende der Fahnenstange", demzufolge jede solche Halbgerade einen Punkt im Inneren der Kreisscheibe ohne herkömmliche Umgebung dort aufweisen muss. Somit ist der Offenheitsbegriff bei Mengen untauglich (vgl. [819], S. 36). Wird die Einheitskreisscheibe um den Koordinatenursprung betrachtet, so ist der letzte Punkt der Halbgeraden [0, 1[dual dargestellt der Punkt $0,\bar{1}_2$ ohne (!) Umgebung und der nächste Punkt ist der Randpunkt 1. Dazwischen liegt kein weiterer Punkt.

Daher ist jede Kreisscheibe ohne Rand zugleich abgeschlossen, weil die betrachteten Endpunkte der Halbgeraden gerade den Abschluss als Rand bilden. Da auf ihrem Rand keine Umgebung existiert, ist auch jede abgeschlossene Menge im euklidischen Raum sinnlos. Jede offene Menge ist dort zugleich abgeschlossen. Diese Absurdität verstört, wenn die infinitesimalen Größen differenziert betrachtet, also insbesondere die Zahlen 1 (rational!) und $0,\bar{1}_2$ (algebraisch!) nicht gleichgesetzt werden.

Genauso absurd ist der unendliche Durchschnitt offener Mengen wie der aller offenen konzentrischen Kreisscheiben, der eine abgeschlossene Menge bilden kann, genauer: den gemeinsamen Kreisscheibenmittelpunkt. Eine unendliche Vereinigung abgeschlossener Mengen kann eine offene Menge wie eine offene Kreisscheibe als Vereinigung aller deren Punkte als abgeschlossenen Mengen bilden. Eine 0-dimensionale Menge (Punkt) ist offen, weil hier jede Umgebung ebenfalls aus einem Punkt besteht.

Deshalb ist sogar die leere Menge $\emptyset$ abgeschlossen und als Folge der gesamte euklidische Raum, was sich bei Kugeln auf höhere Dimensionen verallgemeinern lässt. Dieser Spezialfall macht auch den allgemeinen Fall absurd bzw. sinnlos: Die Betrachtung von offenen bzw. abgeschlossenen Mengen eignet sich bei metrischen und topologischen Räumen nicht. Insbesondere mutet die herkömmliche Definition des topologischen Raumes seltsam inhaltsleer und willkürlich an.

Das Zulassen infinitesimaler Radien (mit unendlichem reziprokem Wert) macht die Begriffe innerer bzw. äußerer Punkt sowie Randpunkt jedoch sinnvoll. Der herkömmliche Irrationalitätsbeweis von $\sqrt{2}$ enthält eine gewisse Dialektik und $\mathbb{R}$ die multiplikativ Inversen meist nur näherungsweise. Thema sind auch herkömmlich nicht messbare, mitt- und unendliche Mengen sowie unstetige Funktionen. Jede probabilistische Aussage ist erst gewiss, wenn alle ihre relevanten Möglichkeiten verifiziert wurden.

Die Gegenläufigkeitsregel besagt auch im Komplexen, dass bei zu unstetigen Funktionen für die Integration über identische Wege in positiver und negativer Umlaufrichtung der gleiche (!) Funktionswert von beiden möglichen auszuwählen ist. Dies vermeidet einen anderen signifikanten Wert, sodass der Wert des Integrals über beide Richtungen gerade 0 ist. Der Satz von Stokes lässt sich auch allgemein beweisen (vgl. [764], S. 625 f.). Funktionswerte können Werte überspringen, die dann nicht gemessen werden.

Die herkömmliche Differentiation und Integration verwischen durch herkömmliche Grenzwertbildung die genaue Unterscheidung von Rationalität und reiner Algebraizität. Dies ist z. B. für die exakte Bestimmung von Nullstellen problematisch. Daher lässt sich die herkömmliche Analysis in der bestehenden Form nicht aufrechterhalten und benötigt gangbare Alternativen. Die Periode 2π muss Sinus und Kosinus definieren, da deren Potenzreihen nur für endliche Argumente konvergieren.

Das exakte Volumenintegral hat gegenüber herkömmlichen die einfachste Handhabung. Seine uneigentliche Form ergibt sich analog. Das Zusammenfassen von Funktionswerten zu endlich vielen davon erlaubt auch das Integral für unstetige Funktionen zu berechnen. Hierbei bieten sich u. a. die beiden Euler-Maclaurin-Formeln oder eine geeignete Landau-Notation an. Beachtenswert ist, dass Stetigkeit bei Integral und Ableitung nicht vorausgesetzt wird. Dies ermöglicht eine entsprechende Definition.

Liegt das Ergebnis der Differentiation außerhalb des Definitionsbereiches D, so werde es durch die zu ihm am dichtesten liegende Zahl innerhalb von D ersetzt. Ist diese nicht eindeutig bestimmt, so bestehe das Ergebnis aus (einer von) mehreren Zahlen (z. B. nach einer einheitlichen Regel). Das exakte Integral ist allgemeiner gültig als z. B. Riemann- oder Lebesgue-(Stieltjes-)Integral. Letztere existieren nur in herkömmlich messbaren Mengen. Extrapolationen können Knickstellen aufdecken.

Das Verwenden von $1/\infty$ statt 0 vermeidet die Division durch 0 und eine vage Grenzwertbildung, aber erfordert genau zu überlegen, wo überall das Ersetzen sinnvoll ist, damit kein Widerspruch bei einem Symbolwechsel entsteht. Es gestattet auch Integral und Differential für jede Operation auf den reellen und komplexen Zahlen so zu definieren, dass jede Funktion überall dort zumindest als Richtungsableitung integrierbar und differenzierbar ist, wo die Funktionswerte bestimmt sind.

Die Definition des exakten Integrals über eine Rechteckregel kann Fehlerabschätzungen erfordern (vgl. [564], [945] und [742]). Soll Integrieren als Umkehren der Ableitung über bloßes Summieren hinausgehen, macht es nur für stetige Funktionen Sinn Der zu Nachfolger duale Begriff Vorgänger wird meist nicht noch einmal eigens erwähnt, sondern ist mitzudenken. Nur drei Beispiele der Nichtstandardanalysis verdeutlichen deren Überlegenheit und die Stärke der Verwendung infinitesimaler bzw. unendlicher Werte.

Der Riemannsche Umordnungssatz gilt nicht, da sich das Kommutativgesetz auch im Unendlichen nicht aushebeln lässt: Es stellt nicht zu vertretende Willkür dar, wenn einzelne Summanden ins vernachlässigbare Unendliche verlagert, ohne weiter berücksichtigt zu werden. (Im Komplexen) erlaubt die diskrete Fouriertransformation die Koeffizienten von Taylorreihen besonders leicht zu berechnen. Daraus abgeleitete DFT-Formen eignen sich zur effizienten Zahlenrepräsentation und zu deren Berechnung.

Die Taylorreihe des integrierten Logarithmus erlaubt als geometrische Reihe eine einfache Implementation des multiplikativ Inversen. Funktionen lassen sich als Vektor bzw. Produkt der Fourier-Matrix, die eine Vandermonde-Matrix von Einheitswurzeln ist, mit einem Vektor von festen Funktionswerten an den sogenannten Kronpunkten bestimmen. Letztere sind kreisförmig um einen Entwicklungspunkt angeordnet, der effektiv gewählt werden sollte und zu guter Konvergenz beitragen kann.

Das genannte Produkt kann vor der Berechnung mit einer frei wählbaren Genauigkeit gespeichert werden, die für Computerberechnungen am besten der Kehrwert einer Zweierpotenz ist. Da es sich schnell berechnen lässt und Taylorreihen mit dem Horner-Schema realisiert werden können, ist diese Methode (insbesondere als FFT-Version) sehr effizient. Diese Effizienz erreicht auch die lineare Algebra beim numerischen Lösen von den meisten Differenzialgleichungen mithilfe der DFT-Formen.

Bei partiellen Differenzialgleichungen werden die Variablen anderer Dimensionen außer einer festgehalten. Hierbei werden Matrizen durch Tensoren ersetzt und Beträge über die Signumfunktion berücksichtigt. Dieses Buch basiert auf ISO 80000-2:2019 (Größen und Einheiten – Mathematik). Die herkömmliche, zu ausladende und weniger intuitive, da historisch gewachsene Notation von Summen (Σ), Produkten (Π), Differentialen (d und ∂), Integralen ($\int$) und Wurzeln ($\sqrt{}$) wird vermieden.

Simplex- und numerisch einfache Intexverfahren, welche in 35 Jahren entwickelt wurden und (z. B. mithilfe von Gomory-Schnitten) Hilberts zehntes Problem positiv beantworten, können ein lineares Programm meist in kubischer bzw. quadratischer Zeit lösen. Kleinere Ausgangsprobleme erlauben dem Simplexverfahren das genaue und einfache Rechnen mit (genäherten) reellen Brüchen.

Da jeder natürlichen Zahl n individuelle n-heit zukommt, die nicht aus ihren Vorgängern oder Nachfolgern abgeleitet werden kann, gibt es kein vollständiges Axiomesystem der Mathematik: Mit jeder neuen Zahl entsteht etwas irreduzibel Neues. Jedoch lässt sich ein endliches Axiomesystem für endlich viele Entitäten bei Beschränkung auf ausgewählte Aspekte angeben. Jede Unendlichkeitsstufe verwehrt Vollständigkeit erst recht.

Mathematik ist nicht wertfrei. Theorien basieren auf Voraussetzungen. In der Mathematik werden sie gerne in falsch oder wahr zu erweisende Axiome gefasst. Damit sind alle Theorien unvollständig und eventuell darüber hinaus widersprüchlich. Statt expliziter Axiome eignen sich eventuell implizite Definitionen besser, in denen die Existenz des Angegebenen trotz etwaiger Bedenken und Schwierigkeiten bis zur Widerlegung vorausgesetzt wird.

Die euklidische Geometrie gibt drei Definitionen, die einige Axiome infrage stellen und dabei Ergebnisse der Mengenlehre verwenden. Bei der Frage der gerechten Verteilung von Personen geht es weniger um den theoretischen Gehalt als um die praktische Anwendung. Hier wird eine Tabellenkalkulation eingesetzt. Die Mengenlehre definiert einige neue Mengen und gibt generell deren Anzahl an, insbesondere die der algebraischen Zahlen.

Die Nichtstandardanalysis definiert Integration, Differentiation, Stetigkeit, Konvergenz und Grenzwert für endliche und unendliche und eventuell herkömmlich nicht messbare Mengen ggf. unter Berücksichtigung von deren Homogenität sowie für unstetige Funktionen neu. Sie gibt Beispiele an, um bessere, genauere, elegantere oder schlichtweg korrekte mathematische Aussagen auch für bekannte Sätze der Analysis zu erhalten. Sie löst das Maßproblem.

Die Ratschläge sind Ergebnisse meiner mathematischen Erfahrung. Die lineare Optimierung beweist mit dem Durchmessersatz für Polytope wie schnell das im schlechtesten Fall exponentielle Simplexverfahren sein kann. Die Topologie definiert den (einfachen) Zusammenhang von Mengen neu und erweist die reellen und komplexen Zahlen lediglich als Räume mit Fréchet-Topologie bzw. spricht deren Hausdorffeigenschaft ab.

In der Zahlentheorie werden notwendige und hinreichende Kriterien für transzendente Zahlen mit Beispielen angegeben. Bewiesen werden der Schranken-, Koeffizienten- und Approximationssatz sowie das Größte-Primzahl-Kriterium. Widerlegt wird der Satz von Thue-Siegel-Roth. Eine Vermutung von Littlewood wird widerlegt und herkömmlich bewiesen. Die Vermutung von Alaoglu und Erdős wird bewiesen und die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung widerlegt.

In der Zeitrechnung wird gezeigt, wie das Oktalsystem praktisch weltweit angewendet werden kann und welche Vorteile sich daraus ergeben. Neben Einführung eines neuen Kalenders und einer neuen Uhrzeitberechnung wird das Oktalsystem auch auf die SI-Einheiten Meter (m) und Sekunde (s) angewandt. Es wird mit praktischen Beispielen begründet, warum das Oktalsystem das Dezimalsystem vorteilhaft komplett ablösen kann.

Für Schönheit und Eleganz in der Mathematik lässt sich sorgen, indem das Darzustellende hinreichend durchdacht und ohne zu geizen auf die klare Essenz reduziert wird, die beide begründet und Kennzeichen des Wahren ist. Leider gibt es viel hässliches Langes in der mathematischen Welt. Es bleibt zu hoffen, dass dieses Buch viel Vergnügen mit der Nichtstandardmathematik und Einblick in das wahre Gute und Schöne verschaffen kann. Wer daran Gefallen findet, verwirkliche beide selbst!

Euklidische Geometrie

Das Folgende setzt die Mengenlehre mit der euklidischen Norm $||\cdot||$ voraus.

Definition: Sei R ein euklidischer Raum als Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 3}$ (s. Mengenlehre). Zwei verschiedene *Punkte* als Elemente von R heißen *(Punkte-)Paar*. Ein (ein-) zweidimensionaler Unterraum von R wird als *(Gerade) Ebene* bezeichnet. Eine eindimensionale Punktmenge in R, bei der jeder Punkt lückenlos mindestens einen und höchstens zwei benachbarte Punkte hat, heißt *Linie*. Der *Abstand* ist durch die euklidische Norm $||\cdot||$ gegeben und ergibt aufsummiert die *euklidische Weglänge* A.△

Definition: Eine *Strecke* ist eine zusammenhängende Teilmenge einer Geraden, deren Anfangs- und Endpunkt sie genau bestimmen und mit jeweils nur einem Nachbarn endlichen Abstand haben. Zwei Strecken mit einem gemeinsamen inneren Punkt *schneiden* sich. Zwei durch Translation auseinander hervorgegangene Strecken heißen *parallel*. Die Punkte der Ebene mit dem gleichen Abstand (genannt *Radius*) zu einem weiteren Punkt werden als *Kreis* bezeichnet, der mit seinem Inneren eine *Kreisscheibe* bildet.△

Ergebnis: Bei kürzer definierten Geraden gibt es für das Axiom von Pasch, das der Vollständigkeit und diverse andere Axiome sowie ihre Äquivalente mit Obigem viele Gegenbeispiele. Das Unterraumkonzept kann Hilberts Inzidenzaxiome I.6 und I.8 beweisen. Bestimmt eine Gerade eine parallele Gerade durch einen weiteren Punkt mit dem kürzesten Abstand eindeutig, ist das Parallelenaxiom in der euklidischen Geometrie redundant. Die Axiome der Anordnung und Kongruenz sind überflüssig.

Entgegen Hilberts Inzidenzaxiom I.4 reichen drei verschiedene Punkte nicht aus, um eine Ebene eindeutig zu bestimmen, da es verschiedene Unendlichkeiten gibt. Hilberts Inzidenzaxiom I.7 ist falsch (vgl. Hilbert, David: *Grundlagen der Geometrie*; 2. Aufl.; 1903; Teubner; Leipzig, S. 2 - 17), da Ebenen im Unendlichen dennoch begrenzt sind und sich genau in einem Punkt schneiden können. Der Hauptsatz der Mengenlehre erlaubt alle (drei antiken) exakt nicht lösbaren Probleme über den Strahlensatz und Farey-Folgen ([455], S. 62 f.) mit beliebiger Genauigkeit zu lösen.

Sind zwei Geraden lediglich dann parallel, wenn sie in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, ist das Parallelenaxiom falsch: Der Kehrwert des Abstands des weiteren Punktes zu der ursprünglichen Geraden kann mindestens unendlich oder kleiner als $|{}^{\omega}\mathbb{N}|$ sein und dann lassen sich unendlich viele verschiedene Geraden durch den weiteren Punkt legen, ohne die ursprüngliche Gerade zu schneiden. Hilberts vage Formulierung des Vollständigkeitsaxioms macht es letztlich nicht zukunftstauglich.

Das Archimedische Axiom ist auf eine unendliche natürliche Anzahl von Abtragungen einer Strecke auszudehnen, die nicht über den Anfangs- oder Endpunkt einer Geraden hinaus geschehen können. Es ist im endlichen Fall durch den Archimedischen Satz (s. Mengenlehre) zu ersetzen. Das Axiom von Pasch ist ebenso entbehrlich, da eine Gerade aufgrund ihrer maximalen Länge das Innere eines Dreiecks vollständig passieren muss, also auch ihren Rand, sofern einer ihrer Punkte in diesem Inneren liegt.

Lotsatz: Mit $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 2}$ enthält jede konvexe Menge S aus ${}^{\omega}\mathbb{R}^n$ einen Punkt, der das Fällen von $\hat{\mathrm{n}}$ Loten auf ∂S (auch auf eine Ecke) erlaubt, da dies in der Ebene alle 90° möglich ist (vgl. [931], S. 14 f.).□

Toeplitz-Vermutung: Jede geschlossene Jordan-Kurve besitzt ein einbeschriebenes Quadrat.

Gegenbeispiele: Das rechtwinklige Dreieck mit Kathetenlänge ι und das stumpfwinklige Dreieck mit dem geeignet infinitesimal verschobenen Eckpunkt des höchstens einen einbeschriebenen Quadrates.□

Satz: Ein geeignetes infinitesimales Nebeneinanderlegen äquichordaler Punkte führt zu einem Jordanbereich mit mehr als einem äquichordalen Punkt (vgl. [931], S. 9 f.).□

Satz von Fickett: Für jede Lage zweier überlappender kongruenter n-Quader P und Q mit $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 2}$, $\grave{\mathrm{m}} := \hat{\mathrm{n}}$ und dem exakten Standardmaß μ gilt (s. Nichtstandardanalysis und [931], S. 25), wobei μ für $n = 2$ gerade A ist:

$$\tilde{\mathrm{m}} < r := \mu(\partial P \cap Q)/\mu(\partial Q \cap P) < m.$$

Beweis: Das zugrundeliegende Extremalproblem hat sein Maximum für Rechtecke mit den Seitenlängen s und $s + \hat{\iota}$. Mit $q := 3 - \hat{\iota}\tilde{s}$ gilt $\min r = \tilde{\mathrm{q}} \leq r \leq \max r = q$. Der Beweis für $n > 2$ verläuft analog.□

Gerechtes Verteilen

Im Leben gibt es oft Verteilungsungerechtigkeiten. Obwohl das Nachfolgende nicht neu ist, soll an Beispielen, die sich täglich in der Schule ereignen, ein gerechtes Verteilen demonstriert werden:

1. Wie verteilen wir Arbeitsergebnisse gerecht?
2. Wie schleusen wir Gruppen gerecht durch die Kantine?
3. Wie bilden wir gerecht Gruppen im Sportunterricht?

Zu 1.: Wir legen die Arbeitsergebnisse zunächst nach den Namen der anwesenden SchülerInnen alphabetisch geordnet ab (in Fächern, auf dem Tisch o. Ä.). Die Namen sind oder werden alphabetisch in einer Tabellenkalkulation (mit Ausnahme der fehlenden SchülerInnen) abgelegt. Hinter jedem Namen wird eine Zufallszahl erzeugt. Die Namen werden nach der Zufallszahl geordnet. Die SchülerInnen rufen wir nach dieser Ordnung (eventuell in Gruppen) auf, damit sie ihre Arbeitsergebnisse entgegennehmen können.

Zu 2.: Zu Beginn bilden wir Gruppen mit Mitgliedern, die zusammen speisen möchten oder sollen. Diese Gruppen (-namen) werden wie unter 1. beschrieben geordnet. Dann wird für jede Gruppe berechnet (zur Verfügung stehende Ausgabezeit) * Gruppenstärke / Speisende. Die zweite Gruppe geht dann in die Kantine, wenn die für die erste Gruppe ermittelte Zeit vorüber ist. Die dritte Gruppe folgt, wenn zusätzlich die Zeit für die zweite Gruppe verstrichen ist, usf. Gegebenenfalls sind die Zeitpunkte gerundet zu berechnen. Haben einzelne Gruppen nur in bestimmten Intervallen Zeit, werden sie zuerst auf die Zeitintervalle verteilt. Dann setzt das Verfahren mit der Restzeit für die übrigen fort.

Zu 3.: Zu Beginn werden Gruppen gleicher Leistungsstärke gebildet und die einzelnen Namen in einer festen Reihenfolge untereinander geschrieben sowie nach einer zugeordneten Gruppenzahl durchnummeriert. Wenn Gruppenmitglieder fehlen, filtern wir sie zunächst heraus, indem wir z. B. den Eintrag "fehlt" hinter ihrem Namen vermerken und anschließend nach den leeren Einträgen selektieren.

Die Gruppengröße sollte ein Vielfaches der Anzahl der zu bildenden Gruppen sein. Die Reihenfolge der Namen sollte aus Gründen der Wahrscheinlichkeit fest sein. Änderungen der Leistungsstärke werden in geänderten Gruppen berücksichtigt. Hinter jedem Namen wird die Nummerierung durch die Anzahl der Gruppen geteilt. Wenn die Nummerierung nicht bei 0 beginnt, muss vorher eine Zahl entsprechend subtrahiert werden. Von den erhaltenen Werten werden die Nachkommastellen abgeschnitten. Dies erreicht auch eine Rundung der um 1/2 reduzierten Werte. In einer weiteren Spalte werden nun Zufallszahlen eingetragen.

Darauf werden die drei Spalten erst nach den zuerst ermittelten Werten, dann zusätzlich nach den Zufallszahlen geordnet. In einer vierten Spalte werden von oben beginnend die Zahlen von 1 bis Anzahl der Gruppen eingetragen. Nach dem letzten Wert wird wieder mit 1 fortgesetzt bis zur Anzahl der Gruppen usf. Nun werden die Zahlen wieder nach Namen sortiert. Abschließend können wir die Gruppenzuteilungen in alphabetischer Reihenfolge bekannt geben.

Ist die Anzahl der einzuteilenden SchülerInnen nicht ein Vielfaches der Anzahl der Gruppen, sollten wir Stellvertretungen aus derselben Gruppe zu jedem Namen bilden. Die TrägerInnen der Namen, die die geringsten Fehlzeiten durch Aussetzen haben, werden zu Aussetzenden bestimmt. Sie vertreten ihre StellvertreterInnen (z. B., wenn es mehrere Durchläufe in einer Unterrichtseinheit gibt). Die Fehlzeiten werden entsprechend gutgeschrieben.

Ein einfaches Verfahren mit einem Würfel (statt einem Computer) funktioniert wie folgt: Die SchülerInnen werden nach ihrer (selbst- oder fremdbestimmten) Leistungsstärke auf einer Linie geordnet aufgestellt. Der leistungsstärksten Person wird durch Werfen des Würfels einer der Gruppen zugeteilt. Die nächste Person wird unter den verbleibenden Gruppen ausgewürfelt usf. Hat jede Gruppe ein Mitglied, wird wie bei der leistungsstärksten Person mit der nunmehr leistungsstärksten Person fortgesetzt.

Ohne nennenswerte Hilfsmittel können wir Gruppen auch wie folgt bilden: Wir fordern alle SchülerInnen auf, sich in jeweils einem Kreis nach ihrer Leistungsstärke zufällig zu bewegen. Pärchenbildung begegnen wir mit der Aufforderung "A und B auseinander zur Kreislinie!". Nach dem Kommando "Stopp!" verharrt jede Person an ihrem Platz. Eine oder einen der SchülerInnen fordern wir nun auf, ihren oder seinen Platz zu verlassen und sich auf einer ungefähren Kreislinie um die restlichen oder um jeweils eine Gruppe zu bewegen.

Nach einem weiteren Kommando "Stopp!" teilen wir die SchülerInnen durch gedachte Geraden in Gruppen auf. Zuerst wird der Schnittpunkt der Gerade durch den Haltepunkt der oder des auf der Kreislinie sich Befindenden und den jeweiligen Kreismittelpunkt mit der Gruppenkreislinie gebildet. Die Gruppen werden durch parallele Geraden abgegrenzt, die parallel zu der Geraden durch den jeweiligen Schnittpunkt und den jeweiligen Kreismittelpunkt gehen.

Diese Verfahren sind gerechter als die urteilende Selektion durch einzelne SchülerInnen. Erfahrungsgemäß reichen drei Leistungsstärken aus.

Lineare Optimierung

Das Folgende setzt Mengenlehre, Topologie und Nichtstandardanalysis voraus.

Durchmessersatz für Polytope und Polyeder: Jeder Durchmesser eines durch m Restriktionen gegebenen n-dimensionalen Polytops bzw. Polyeders mit $m, n \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 2}$ ist maximal $2(m + n - 3)$.

Beweis: Maximal $\acute{m}$ Hyperebenen lassen sich zu einem unvollständigen Zyklus der Dimension 2 zusammenstellen und es gibt maximal $n - 2$ Ausweichmöglichkeiten zur Seite in den restlichen Dimensionen. Das Überwinden jeder minimalen Strecke benötigt maximal zwei Kanten und liefert den Faktor 2.□

Definition: Sei $\vartheta := \omega\,{}_{\epsilon}\omega$ und $\|\cdot\|_1$ die 1-Norm. Geht $x \in X \subseteq {}^{\omega}\mathbb{R}^{\omega}$ in den nächsten Schritt über, folgt ihm * mit $\Delta x := x^* - x$. Der *Einheitsvektor* von x ist ${}_1x := x/\|x\|$, wobei ${}_10$ undefiniert ist. Seien $x, y \in X$ in $(x, y, \ldots)^{\mathrm{T}}$ Zeilenvektoren. Benötigt ein Verfahren Rechenzeit in Sekunden und Speicher in Bits von $\mathcal{O}(\omega^{\mathcal{O}(1)})$, ist es *polynomiell.* Ist eine der beiden Größen $\mathcal{O}(\epsilon^{|\mathcal{O}(\omega)|})$, ist es *exponentiell.* Das *Eigenprodukt* (bisher: Determinante) einer quadratischen Matrix sei das Produkt ihrer Eigenwerte.△

Satz: Das Simplexverfahren aus [777] löst fast immer ein (LP) in $\mathcal{O}(\omega^3\vartheta)$.

Beweis und Algorithmus: Sei $P := \{x \in {}^{\omega}\mathbb{R}^n : Ax \leq b \in {}^{\omega}\mathbb{R}^m, A \in {}^{\omega}\mathbb{R}^{m\times n}, m, n \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*\}$ der zulässige Bereich des LPs $\max\{c^{\mathrm{T}}x : c \in {}^{\omega}\mathbb{R}^n, x \in P\}$. Dessen Dualisierung erzielt $x^* \in {}^{\omega}\mathbb{R}^m_{\geq 0}$. Ein (großes) $x^+ \in {}^{\omega}\mathbb{R}_{\geq 0}$ erreicht $x^* \in {}^{\omega}\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ mit $x := x^* - x^+1_n$ gilt $b \geq 0$ nicht, liefert das LP $\max\{-h \in {}^{\omega}\mathbb{R}_{\leq 0} : Ax - b \leq h1_m\}$ für den Startpunkt $x_0 := 0$ ein $x \in P_{\geq 0}$. Start- und Zielwert von h sei $|\min\{b_1, \ldots, b_m\}|$ bzw. 0. Nur ein Pivotschritt bewirkt $b^* \geq 0$. Seien $i, j, k \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ und sei $a_i{}^{\mathrm{T}}$ der i-te Zeilenvektor von A. Gilt $c_j \leq 0$ für alle j, ist das LP gelöst.

Gibt es ein $c_j > 0$ mit $a_{ij} \leq 0$ für alle i, ist das LP positiv unbeschränkt. Existiert ein $c_j = 0$ mit $a_{ij} \leq 0$ für alle i, lassen sich c_j und $A_{.j}$ wie die b_i und a_i mit $a_{ij} < 0$ vorerst entfernen. Unlösbar ist auch $a_{ij}x_j \geq 0 > b_i$ für alle j. Das Teilen aller $a_i{}^{\mathrm{T}}x \leq b_i$ durch $\|a_i\|$ und aller c_j bzw. a_{ij} durch $\min|a_{ij}|$ für $a_{ij} \neq 0$ sowie jedes j ist ggf. zu wiederholen und am Ende rückgängig zu machen. Restriktionen mit $a_i \leq 0$ werden ggf. entfernt.

Die Wahl eines $b_k/a_{kj} := \min\{b_i/a_{ij} : a_{ij} > 0\}$ für jedes $c_j > 0$ sowie Nichtbasisvariablen x_j liefert mit $x_j^* = x_j + b_k/a_{kj}$ ein nächstes $x^* \in P_{\geq 0}$. Bei Wahl der steilsten Kante bildet a_{kj} das Pivotelement zu dem x_j, das $c^{\mathrm{T}}{}_1\Delta x$ bzw. $c_j^2/\grave{v}_j^2$ mit $v_j := \|A_{.j}\|$ in der k-ten Restriktion maximiert. Mehrere Maxima erlauben die Pivotregel des Bestwerts $\max\limits_{k,j} c_j\, b_k/a_{kj}$ zu verwenden oder (langsamer) des kleinsten Winkels $\min {}_{(1)}1\mathbb{1}_n^T\,{}_1c^*$.

Wiederholt sich $c^{\mathrm{T}}x^* = c^{\mathrm{T}}x$, werden die Restriktionen mit $b_i = 0$ um ein $d \in {}^{\omega}\mathbb{R}_{>0}$ abgeschwächt. Mit $b_i := \|a_i\|$ steht d ggf. nicht im Tableau. Liegt eine mehrfache Ecke ausnahmsweise erneut vor, wird zu jedem b_i einfach $\|a_i\|$ addiert. Sie zu verlassen kann das Lösen eines LPs mit $c > 0$ und $b = 0$ erfordern. Danach werden die Abschwächungen (Perturbationen) zurückgenommen. Diese Aufgabe kann sich auch am Ende stellen, wenn weitere Lösungen des LPs zu bestimmen und mindestens zwei $c_j = 0$ sind.

Dies vermeidet die sich stark unterscheidenden Abschwächungen bspw. der lexikographischen Methode. Die Rechteckregel erlaubt c_j^*, a_{ij}^* und b_i^* einfach zu berechnen (vgl. [775], S. 63). Auch die Regel von Bland ist nicht optimal. Die evtl. exponentielle Laufzeit in der linearen Optimierung lässt sich nicht verhindern: Sind Polytope z. B. vom Klee-Minty- oder Jeroslow-Typ, unterscheiden sich ihre (entfernten) Ecken numerisch kaum. In Übereinstimmung mit dem Forschungsstand folgt die Behauptung.□

Bit-Quadrat-Satz (kurz: Bit²-Satz): Wiederholungen erlauben mehr als $\mathcal{O}(n^2)$ Multiplikationen und Additionen eines Algorithmus von Zahlen der Bitlänge $m \leq n$ mit $m, n \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ auf $\mathcal{O}(n^2)$ zu reduzieren.□

Beispiele: Das Matrizenprodukt $(c_{ij}) := \left(+_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right)$ von $(a_{ij}), (b_{ij}) \in {}^{\omega}\mathbb{C}^{n\times n}$ über Produkte $+_{k=1}^n b_{jk}4^{km}$ mit a_{ij} und $i, j \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*_{\leq n}$, die Bestimmung einer n-dimensionalen Taylorreihe (s. Nichtstandardanalysis), der Gauß-Jordan-Algorithmus, das Simplex- und das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren.

Bemerkung: Ein zu großes m wird rechnerisch geeignet herabgesetzt. Mit Simultanvergleichen ermöglicht Quaternionenkodierung Matrizen gemeinsam in der Cloud zu multiplizieren.□

Satz: Das Intexverfahren löst die meisten lösbaren LPs mit *Int*er-/*Ex*trapolationen in $\mathcal{O}(\vartheta^3)$.

Beweis und Algorithmus: Sei $z := m + n$ und $d \in [0, 1]$ die Dichte von A. Zuerst werden $b^{\mathrm{T}}y - c^{\mathrm{T}}x \leq 0$, $Ax \leq b$ sowie $A^{\mathrm{T}}y \geq c$ normiert und skaliert. $P_r := \{(x, y)^{\mathrm{T}} : x \in {}^{\omega}\mathbb{R}^n_{\geq 0}, y \in {}^{\omega}\mathbb{R}^m_{\geq 0}, b^{\mathrm{T}}y - c^{\mathrm{T}}x \leq r \in [0, \rho], Ax - b \leq r1_m, c - A^{\mathrm{T}}y \leq r1_n\}$ habe den Radius $\rho := s|\min\{b_1, \ldots, b_m, -c_1, \ldots, -c_n\}|$ und den Skalierungsfaktor $s \in]1, 2]$.

Es folgt $01_z \in \partial P_\rho$. Nach dem starken Dualitätssatz ([775], S. 60 – 65) löst das LP $\min\{r \in [0, \rho] : (x, y)^{\mathrm{T}} \in P_r\}$ ebenso die LPs $\max\{c^{\mathrm{T}}x : c \in {}^{\omega}\mathbb{R}^n, x \in P_{\geq 0}\}$ und $\min\{b^{\mathrm{T}}y : y \in {}^{\omega}\mathbb{R}^m_{\geq 0}, A^{\mathrm{T}}y \geq c\}$. Seine Lösung ist der geometrische Schwerpunkt g des Polytops P_0. Mit $p_k^* := \min \check{p}_k + \max \check{p}_k$ für $k = 1, \ldots, \grave{z}$ wird g durch $p_0 := (x_0, y_0, r_0)^{\mathrm{T}}$ approximiert, bis $\|\Delta p\|_1$ hinreichend klein ist. Die Lösung $t^{\mathrm{o}}(x^{\mathrm{o}}, y^{\mathrm{o}}, r^{\mathrm{o}})^{\mathrm{T}}$ des zweidimensionalen LPs $\min\{r \in [0, \rho] : t \in {}^{\omega}\mathbb{R}_{>0}, t(x_0, y_0)^{\mathrm{T}} \in P_r\}$ approximiert g besser.

Es wird erreicht $r \leq \check{\rho}$ und mit $t^{\mathrm{o}}(x^{\mathrm{o}}, y^{\mathrm{o}})^{\mathrm{T}}$ usf. wiederholt, bis ggf. $g \in P_0$ in $\mathcal{O}({}_2\rho^2 dmn)$ berechnet ist. Das Lösen aller zweidimensionalen LPs $\min_k r_k$ durch Bisektionsverfahren für $r_k \in {}^{\omega}\mathbb{R}_{\geq 0}$ und $k = 1, \ldots, z$ in jeweils $\mathcal{O}(\vartheta^2)$ ermittelt $q \in {}^{\omega}\mathbb{R}^k$ mit $q_k := \Delta p_k \Delta r_k / r$ und $r := \min_k \Delta r_k$. Vereinfacht sei $|\Delta p_1| = \ldots = |\Delta p_z|$. Hierbei wäre $\min r_{\grave{z}}$ für $p^* := p + wq$ mit $w \in {}^{\omega}\mathbb{R}_{\geq 0}$ ebenso zu lösen. Folgt $\min_k \Delta r_k r = 0$, wird die Berechnung gestoppt, andernfalls wiederholt bis $\min r = 0$ oder $\min r > 0$ feststeht.□

Bemerkungen: Ist kein Missbrauch für intransparente oder schlechte Entscheidungen zu befürchten, werden Implementierungsdetails veröffentlicht. Simplexverfahren und Face-Algorithmus ([916], S. 580 f.) lösen LPs für kleine m und n schneller. Das Intexverfahren übertrifft die bekannten (Worst-Case-) LP-Algorithmen in $\mathcal{O}(\omega^{37/18}\vartheta)$. Absichtliche Rundungsfehler in b und c machen jede Lösung eindeutig.

Bemerkung: Falls erforderlich schwächt ein gleicher kleiner Betrag die Restriktionen vorübergehend ab. Die Laufzeit für $m, n \in {}^{\nu}\mathbb{N}^*$ ist $\mathcal{O}(dmn)$. Wird es für verteiltes Rechnen in ${}^{\nu}\mathbb{R}^{\nu}$ optimiert, beträgt sie nur $\mathcal{O}(1)$. Gilt $\acute{v}_0 \leq \lfloor v_j \rfloor - v_j$ für ganzzahlige Lösungen v_j, bewährt es sich gut für (gemischt-)ganzzahlige Probleme und die (nicht-)konvexe (Pareto-)Optimierung (nach der Natur wie in [1010]).

Bemerkung: Es macht sich das Zusammenfallen des berechneten geometrischen Schwerpunkts und des Inkugelmittelpunkts in P_0 zunutze. Das (paarweise) Drehen der Koordinatenachsen des ersteren wie von c durch eine einfache Rotationsmatrix sichert dies in vergleichbarer Laufzeit ab. Zahlen der Länge $\mathcal{O}(\omega)$ lassen sich bekanntlich nur in $\mathcal{O}(\vartheta)$ abarbeiten. Auch das Folgende lässt sich einfach ins Komplexe überführen:

Folgerung: Das LP $\max\{\|x - x^o\|_1 : c^{\mathrm{T}}x = c^{\mathrm{T}}x^o, Ax \leq b, x - x^o \in [-1, 1]^n, x \in {}^{\omega}\mathbb{R}^n_{\geq 0}\}$ kann zur ersten Lösung x^o ggf. eine zweite in $\mathcal{O}(\vartheta^3)$ bestimmen, wobei y^o analog behandelt werden kann.□

Folgerung: Das LP $\max\{\nu|\lambda_j| + \|x_j\|_1 : Ax_j = \lambda x_j, |\lambda_j| \in [0, r_j], x_j \in [-1, 1]^{n*}\}$ kann für jedes $j = 1, \ldots, n$ den Eigenwert $\lambda_j \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ und den Eigenvektor $x_j \in {}^{\omega}\mathbb{R}^n$ der Matrix $A \in {}^{\omega}\mathbb{R}^{n \times n}$ in $\mathcal{O}(\vartheta^3)$ bestimmen.□

Folgerung: Die LPs $\max\{x_j : Ax = 0\}$ liefern alle Lösungen von $Ax = b$ in $\mathcal{O}(\vartheta^3)$. Die Matrix A ist genau dann regulär, wenn das LP $\max\{\|x\|_1 : Ax = 0\} = 0$ ist.□

Folgerung: Sei $\alpha_j := A^{-1}_{.j}$ für $j = 1, \ldots, n$ zur Matrix $A^{-1} \in {}^{\omega}\mathbb{R}^{n \times n}$ und sei δ_{ij} das Kronecker-Delta. Für reguläres A ist das Eigenprodukt $\neq 0$ und lässt sich jedes $A\alpha_j = (\delta_{1j}, \ldots, \delta_{nj})^{\mathrm{T}}$ in $\mathcal{O}(\vartheta^3)$ lösen.□

Folgerung: Das Polynom $c_{\acute{n}}x^{\acute{n}} + \ldots + c_1x + c_0$ lässt sich in $\mathcal{O}(\vartheta^3)$ mit der Messung $(x_j, y_j) \in {}^{\omega}\mathbb{R}^2$ und den Residuen $r_j \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, m$ und $(c, x)^{\mathrm{T}} \in {}^{\omega}\mathbb{R}^{\grave{n}}$ aus $y = r + Xc$ und $X^{\mathrm{T}}r = 0$ mit $X = \left(x_j^k\right)$ für $k = 0, \ldots, \acute{n}$ bestimmen (auch unter zusätzlichen Nebenbedingungen, vgl. [893], S. 196 ff.).□

Folgerung: Die DFT (s. Wissenschaftliches Rechnen) kann die Padé-Approximation $a(x)/b(x) = +_{m=0}^{n} a_m x^m / +_{m=0}^{n} b_m x^m$ von $f(x)$ für $x \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ in $\mathcal{O}(\vartheta^3)$ bestimmen.□

Korollar: Intex- und zweidimensionale Bisektions- oder Newtonverfahren lösen die meisten lösbaren konvexen Programme $\min\{f_1(x) : x \in {}^{\omega}\mathbb{R}^n, (f_2(x), \ldots, f_m(x))^{\mathrm{T}} \leq 0\}$ mit konvexen Funktionen $f_k \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ für $k = 1, \ldots, m$ in polynomieller Laufzeit, wenn die Anzahl der Operanden x_j der $f_k \leq \omega^{\nu-3}$ ist und ein x existiert mit $f_k(x) < 0$ für alle $k > 1$ (vgl. [893], S. 56 ff.).□

Korollar: Das LP max $\{x : y_{\acute{m}} - xy_m = b_{\acute{m}}, y_n = y_0 = 0, x \leq x_0 \in {}^{\omega}\mathbb{R}\}$ kann für $m = 1, ..., n$ nach dem Horner-Schema ein $b_{\acute{n}}x^{\acute{n}} + ... + b_1x + b_0 = 0$ lösendes $x \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ in $\mathcal{O}(\vartheta^2)$ bestimmen.□

Mengenlehre

Definition: Der Verzicht auf Unterscheidung zweier Entitäten macht sie *identisch*. Die Gesamtheit nicht-identischer Entitäten wird als *Menge* S von *Elementen* mit $|S|$ als deren *Anzahl* n bezeichnet, die keine Elemente enthaltende *leere Menge* mit dem Symbol $\emptyset$. Lässt sich $S \neq \emptyset$ sukzessive die aufgerundete Hälfte der verbliebenen Elemente entnehmen, bis S leer ist, so ist n *endlich*, andernfalls *unendlich*. Sei ν die größte *endliche*, ω dazwischen die größte *mittendliche* und ι die kleinste positive reelle Zahl.△

Herkömmlich definieren hinlänglich bekannte Axiome die reellen Zahlen als linear geordneten Körper und die komplexen Zahlen mit der imaginären Einheit $\underline{1}$ (gesprochen "komp 1") als Körper. Analog lassen sich Addition, Multiplikation und deren Inversenbildung in deren umfassendste und per Definition abgeschlossenen Oberkörper $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C} := \mathbb{R} + \underline{\mathbb{R}}$ (mit weiteren Operationen wie bspw. der Potenzierung) fortführen. Jede Zahl aus $\mathbb{C}^*$ mit unendlichem Betrag ihres Kehrwertes heißt *infinitesimal*.

Auf die Darstellung der Peano-Axiome und der Körperaxiome wird hier bewusst verzichtet, um anschaulich zu bleiben und das Neue herauszustellen. Zwei Zahlen müssen einen Minimalabstand besitzen, da *alle* verschiedenen Zahlen von $\mathbb{R}$ durch einen Abstand getrennt sind. Die gegenteilige Annahme, dass das Minimum nicht fest ist, führt auf den Widerspruch, dass jede Zahl aus $\mathbb{R}$ mindestens einen nächsten Nachbarn als Zahl haben muss, der selbst in $\mathbb{R}$ liegt (vgl. die Isomorphie oben).

Die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen ist isomorph zu einer Menge (hyper-)natürlicher bzw. ganzer Zahlen. Sie hat sowohl ein festes minimales als auch ein festes maximales Element, da von einer ganzheitlichen und vollständigen Betrachtung von $\mathbb{R}$ ausgegangen wird. Hieraus folgt zusammen mit den Körperaxiomen ihre Abgeschlossenheit. Andernfalls wäre eventuell die bisherige Theorie immer wieder an die Gegebenheiten anzupassen. Als Folgen notierte Zahlen sind schlichtweg unhandlich (vgl. [741], S. 15 f.).

Ein Beginn mit der Menge der herkömmlich natürlichen Zahlen ermöglicht durch (herkömmlich und unendliche natürliche) Induktion zu zeigen, dass nach Cantor bis in jede beliebige Potenz diagonalisiert werden kann. Werden Hilberts Translationen ins Unendliche zu Hilfe genommen, sind alle (!) unendlichen Mengen gleichmächtig zur Menge der herkömmlich natürlichen Zahlen. Die Anzahlen der Mengen natürlicher und ganzer Zahlen unterscheiden sich aber fast genau um den Faktor 2.

Cantor hat solche Mengen als gleichmächtig angesehen. Seine Unterscheidung zwischen lediglich abzählbaren und überabzählbaren Mengen ist nicht differenziert genug. Die richtige Betrachtung von Bijektionen ergibt ein anderes Bild. Das bisher um Ordinal- und Kardinalzahlen gemachte Aufheben entfällt, da es einen einfacheren Weg gibt: Die *konsequente* Erweiterung der reellen Zahlen.

Definition: Die aus sukzessivem Addieren von 1 zu 0 entstehenden Elemente ergeben die *Menge aller natürlichen Zahlen* $\mathbb{N} := \mathbb{N}^* \cup \{0\}$. Die Zahlen aus $\underline{\mathbb{R}}^*$ heißen *rein komplex*. Das Entfernen der zusammengesetzten Zahlen von $\mathbb{N}_{\geq 2}$ ergibt die *Primzahlen* $\mathbb{P}$, die *ganzen Zahlen* ergeben sich durch $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}^*$ und die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ durch die Brüche mit Zähler aus $\mathbb{Z}$ und Nenner aus $\mathbb{N}^*$. Der *Minimalabstand* von 0 ist ι. $\mathbb{R}$ umfasst hyperreelle und surreale Zahlen. Die Zahlen ν, ω und $1/\iota$ haben für $n \in \mathbb{N}$ die Form 2^n.△

Definition: Sei $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ die *Boolesche Menge*. *Dekrement* und *Inkrement* von $a \in \mathbb{C}$ werden $\acute{a} := a - 1$ bzw. $\grave{a} := a + 1$ notiert und der *Kehrwert* von $u \in \mathbb{C}^*$ ist $\tilde{u} := 1/u$. Gesprochen werden sie "a dek", "a ink" und "Kehr u". Ferner werden $\hat{a} := 2a$, $\check{a} := a/2$ und $a\text{-} := -a$ "a Dach", "halb a" bzw. "a neg" gesprochen. Der Logarithmus von $a \in {}^{\omega}\mathbb{C} \setminus {}^{\omega}\mathbb{R}_{\leq 0}$ zur Basis $b \in {}^{\omega}\mathbb{R}_{>0}$ wird mit ${}_b a$ notiert und gesprochen "b log a". Gilt $\sigma \in \{\nu, \omega\}$ und $S^* = S^{*-1}$, seien ${}^{\sigma}S := S \cap [-\sigma, \sigma]$ für $S \subseteq \mathbb{R}$, ${}^{\sigma}\mathbb{C} := {}^{\sigma}\mathbb{R} + {}^{\sigma}\underline{\mathbb{R}} \subset \mathbb{C}$ und ${}^{\sigma}S := S \cap {}^{\sigma}\mathbb{C}$ für $S \subseteq \mathbb{C}$.△

Definition: Es gibt σ den maximalen Betrag der Zähler und τ den der Nenner aller $s \in {}^{\sigma}_{\tau}S \subset \mathbb{C}$ an. Die Mengen $\mathbb{M}_{\mathbb{R}} := {}^{\omega}\mathbb{R} \setminus {}^{\nu}\mathbb{R}$ und $\mathbb{M}_{\mathbb{C}} := \mathbb{M}_{\mathbb{R}} + \underline{\mathbb{M}}_{\mathbb{R}}$ enthalten die *mittendlichen* Zahlen. Bei reellen Mengen kann der Index $_{\mathbb{R}}$ entfallen. Enthalten zwei Mengen die gleichen Elemente, heißen sie genau dann *gleich* (Extensionalität). Die Menge Y heißt *Vereinigung* der Menge X, wenn sie genau die Elemente der Elemente von X als Elemente enthält. Die *Potenzmenge* der Menge X ist $\mathcal{P}(X) := \{Y : Y \subseteq X\}$.△

Bemerkung: Für Teilmengen von S gilt dies analog. Mit $T := {}^{\sigma}S \notin \{\emptyset, \{0\}\}$ gilt $T + T \nsubseteq T$ oder sogar $T \cdot T \nsubseteq T$. Die Mengen ${}^{\omega}S$ enthalten nur nicht-unendliche Elemente. Die Mengen ${}^{\nu}S$ entsprechen den herkömmlichen Mengen S. Die mittendlichen schließen die Lücke von endlichen zu unendlichen Mengen.

Extremalsatz: Jede lineare Ordnung besitzt sowohl ein maximales als auch ein minimales Element, da alle anderen Konstellationen auf einen Widerspruch zur Totalität bzw. zu Obigem führen.□

Bemerkung: Erst die eindeutige Konstruktion einer nicht endlichen Menge erlaubt deren Anzahl an Elementen korrekt zu bestimmen und den Bezug auf ${}^{\omega}\mathbb{N}$ als Basis. Bei mehreren Konstruktionsmöglichkeiten wird die plausibelste ausgewählt. Die Relation $\in$ ist irreflexiv und asymmetrisch, $\subseteq$ hingegen Teilordnung.

Definition: Die Summe $\mathrm{p(z)} = +_{\mathrm{k}=0}^{\acute{\mathrm{m}}} \mathrm{a_k z^k}$ mit $z \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}^*$ heißt *m-Polynom*, falls die Anzahl der *Koeffizienten* mit bspw. $a_k \in {}^{c}\mathbb{Z}$ oder $a_k \in {}^{\omega}\mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}_{<m}$ und $a_k \neq 0$ endlich ist, sonst *m-Reihe.* Es heißt $\deg(p) := \acute{m}$ für $a_k \neq 0$ der *Polynom-* bzw. *Reihengrad* von p. Für das *Nullpolynom* $p = 0$ sei $\deg(p) := -1$. Eine p(z) auf null setzende Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird als *Nullstelle* und *m-algebraische Zahl (AZ)* bezeichnet.△

Definition: Mit $x \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ sei ${}_{\epsilon^0}(\mathrm{x}) = x$, ${}_{\epsilon^{\grave{n}}}(\mathrm{x}) = {}_{\epsilon}\left({}_{\epsilon^n}(\mathrm{x})\right)$ und ${}_{\epsilon^{\grave{n}}}(\mathrm{x}) := 0$ für ${}_{\epsilon^n}(\mathrm{x}) \leq 1$. Ist $p(z)$ das Minimalpolynom von $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $0 \neq p(\alpha) \approx 0$, so gelte $\min |p(z)| = |p(\alpha)|$. Die Mengen dazu heißen $A := {}^{\mathrm{m}}\mathrm{A_R}$ im reellen Fall und ${}^{\mathrm{m}}\mathrm{R_C} \supset {}^{\mathrm{m}}\mathrm{A_C} \supset {}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{m}}\mathrm{R_C} \supset {}^{\mathrm{m}}\mathrm{Z_C} \supset {}^{\mathrm{m}}\mathrm{N_C}$ im komplexen. Für $a_{\deg(p)} = 1$ ergeben sich *m-ganzalgebraische* Zahlen. Die Notation für *m*-AZen ist $(m; a_{k-1}, a_{k-2}, ..., a_1, a_0; r, i; \#n, \&q; v, p)_s$.△

Definition: Mit $r \in {}^{\nu}\mathbb{N}^*$ $(-{}^{\nu}\mathbb{N}^*)$ existieren eine Nullstelle mit dem r.-größten ($|r|$.-betragskleinsten) Realteil > 0 (< 0), mit $r = 0$, $i \in {}^{\nu}\mathbb{N}^*$ $(-{}^{\nu}\mathbb{N}^*)$ eine nicht-reelle Nullstelle mit dem i.-größten ($|i|$.-betragskleinsten) Imaginärteil > 0 (< 0) und die restlichen AZ analog. Wird für mindestens ein a_j eine Variable eingesetzt, gibt $\#n$ die Anzahl $n \in {}^{\nu}\mathbb{N}^*$ der Nullstellen an und $\&q$ die Anzahl $q \in {}^{\nu}\mathbb{N}$ der mehrfachen Nullstellen. Alle k-Minimalpolynome haben $<$ als Spezifikation s, alle k-Minimalreihen $>$.△

Bemerkung: Hierbei hat r Vorrang vor i und stellt sich mit $r = i = a_0 = 0$ die Zahl 0 dar. Der numerische Wert v hat die Genauigkeit p. Der Verzicht auf Unterscheidung mehrfacher Nullstellen erlaubt diejenigen eines k-Polynoms oder einer k-Reihe mit ganzzahligen Koeffizienten streng totalzuordnen. Die Angaben $r, i; \#n, \&q; v, p$ und s sind ggf. entbehrlich wie z. B. für Brüche. Die $(\nu + 2)$-Tupel $(0, ..., 0, a_{k-1}, ..., a_0; r, i)_<$ mit $a_j \in {}^{\nu}\mathbb{N}$ wohlordnen die AZen lexikalisch streng.

Beispiele: Die Zahlen $(\nu; 1, 0, 0, 0, -1)_>$ sind gegeben als $1, -1, \underline{1}$ und $-\underline{1}$. Die Goldene Zahl $\Phi := \check{1} + 5^{\tilde{2}}/2$ lässt sich mit $(\nu; 1, -1, -1; 1, 0; 1{,}618033, 10^{-6})_<$ notieren. Die Zahl $0{,}\bar{1} = 0{,}1...1$ mit ω Einsen hinter dem Komma ist verschieden von der Zahl $\tilde{9}$, da $9 \times 0{,}\bar{1} = 0{,}9...9 = 1 - 10^{-\omega} \neq 1$ ist. Daher ist sie nicht ω-algebraisch und lässt sich mit $(\omega; 9 \times 10^{\omega}, 1 - 10^{\omega})$ notieren.

Bemerkung: Es seien $m \in {}^{\nu}\mathbb{N}$ der maximal zugelassene Polynomgrad und $n \in {}^{\nu}\mathbb{N}$ der maximale Betrag, den die ganzzahligen Koeffizienten a_k der Polynome $a_m x^m + \mathrm{a}_{\acute{m}}\mathrm{x}^{\acute{m}} + ... + a_1 x + a_0$ mit $k \in {}^{\nu}\mathbb{N}_{\leq m}$ annehmen sollen. Dies ist gerechtfertigt, da die a_k voreinander nicht ausgezeichnet sind. Die Anzahl der AZen entspricht der Anzahl der Nullstellen der so definierten normierten irreduziblen Polynome: Der größte gemeinsame Teiler ggT von deren Koeffizienten ist 1 und es gilt $a_m > 0$ und $a_0 \neq 0$.

Inklusionssatz: Weder enthält eine nichtleere Menge sich selbst oder ihre Potenzmenge, noch lässt sie sich bijektiv auf ihre echte Teilmenge abbilden.

Beweis: Jede Menge unterscheidet sich von ihren Elementen, da sie letztere umfasst. So ist $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. Ihre Differenzmenge weist die Elemente mit fehlendem Partnerelement für die Bijektion auf.□

Folgerung: Dies widerlegt insbesondere Dedekind-Unendlichkeit und Cantors erstes Diagonalargument, da $\mathbb{N}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Ein Verlagern nach hinten der vorne ausgeschlossenen Zahlen macht das zweite haltlos. Gleiches gilt für das Cantorsche, das Russell-Zermelosche und das Banach-Tarski-Paradoxon. Hilberts Hotel widerlegt die Translation, die aus einer unendlichen Menge immer herausführt wie die Nachfolgerabbildung s: ${}^{\omega}\mathbb{N} \to {}^{\omega}\mathbb{N}^* \cup \{\grave{\omega}\}$ aus ${}^{\omega}\mathbb{N}$. □

Definition: *Zyklenfreiheit* bezeichnet die Abwesenheit zyklischer Folgen von Mengen, bei denen jeweils eine als Element in der vorangegangenen enthalten ist. *Ersetzbarkeit* bezeichnet den möglichen Übergang von einer Menge X bei einer eindeutigen Ersetzung jedes Elements von X durch eine beliebige Menge. Enthält die Menge Y genau ein Element aus jedem Element von X (Forderung der Auswählbarkeit), heißt sie *Auswahl* aus einer Menge X von paarweise disjunkten nichtleeren Mengen.△

Lemma: Wegen $\tilde{\nu}m \leq 1 \leq a$ für alle $m \in {}^{\nu}\mathbb{N}$ und $a \in {}^{\nu}\mathbb{R}_{\geq 1}$ ist das Archimedische Axiom ungültig.□

Archimedischer Satz: Es gibt ein $m \in {}^{\nu}\mathbb{N}$ mit $a < bm$ genau dann, wenn mit $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ für $a > b$ zumindest $a < b\nu$ gilt, da $\nu = \max {}^{\nu}\mathbb{N}$ ist.□

Behauptung: Das Cantor-Polynom $P(m, n) := \tilde{2}((m + n)^2 + 3m + n)$ bildet ${}^{\omega}\mathbb{N}^2$ bijektiv auf ${}^{\omega}\mathbb{N}$ ab.

Widerlegung: Es gilt $P(\omega, \omega) = \hat{\omega}\dot{\omega} > \omega = \max {}^{\omega}\mathbb{N}$.□

Bemerkung: Ebenso wird die Fueter-Pólya-Vermutung widerlegt. Wird die Menge ${}^{\omega}\mathbb{N}^2$ durch $\{(m, n) \in {}^{\omega}\mathbb{N}^2 : m + n \leq k \in {}^{\omega}\mathbb{N}\}$ mit $k(k + 3) = \hat{\omega}$ ersetzt, gilt die Behauptung. Da es unendlich viele Mengen mit Anzahl der Elemente zwischen $|{}^{\nu}\mathbb{N}|$ und $|{}^{\nu}\mathbb{R}|$ gibt, ist auch die Kontinuumshypothese falsch.

Fundierungssatz: Wird $X := \{x_m : x_0 := \{\emptyset\}, x_\omega := \{x_1\}$ und $x_{n+1} := \{x_n\}$ mit $m \in {}^{\omega}\mathbb{N}$ und $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 2}\}$ gesetzt, garantiert erst die Forderung des Fundierungsaxioms Zyklenfreiheit, dass jede nichtleere Teilmenge $X \subseteq Y$ ein Element x_0 enthält, sodass X und x_0 disjunkt sind.

Bemerkung: Mit $x_\omega := \{x_0\}$ statt $x_\omega := \{x_1\}$ ist X eine unendliche Kette. Alle Definitionen oben legen die hier vertretene Mengenlehre fest, die ohne echte Klassen und Wohlordnungen auskommt, da nur sinnvolle Mengen betrachtet werden. Die existierende Menge $\mathbb{W}$ aller Welten ist unveränderlich, weil sie sonst der Vollständigkeit widerspräche. Dies bedeutet jedoch nicht, dass Veränderungen in den Welten nicht existieren oder alles determiniert ist. Hierbei hilft es die Zeit räumlich zu betrachten.

Definition: Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ heißen zwei verschiedene Punkte x und y einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{K}^n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ *benachbart*, wenn mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ für alle Punkte $z \in M$ gilt: $\|x\text{-}y\| \leq \max(\|x\text{-}z\|, \|y\text{-}z\|)$. Haben alle benachbarten Punkte von $M \subseteq \mathbb{K}^n$ den Minimalabstand $h \in \mathbb{R}_{>0}$, wird M als *h-homogen* mit der Notation *h-M* bezeichnet. Im Fall $h = \iota$ heißt M *lückenlos*. Es gilt die *Isomorphie* $\mathbb{C}^n \cong \mathrm{R}^{\hat{n}}$.△

Definition: Sei $u1_n := (u, \ldots, u)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{K}^n$. Es wird $u1_n$ "u rep n" gesprochen. Existiert zu jedem $x \in \mathbb{K}^n$ ein Punkt $y \in M$ mit $\|x\text{-}y\| = \iota$, heißt $M \subseteq \mathbb{K}^n$ *dicht* in $\mathbb{K}^n$. Für das punktsymmetrische $\dot{\mathrm{K}}^{\mathrm{n}}$ zu $\mathbb{K}^n$ ist ein *n-Würfel* mit Seitenlänge σ durch ${}^{\sigma}\mathbb{R}^n := \bigtimes_{k=1}^{n} {}^{\sigma}\mathbb{R}$ gegeben und eine *n-Kugel* durch ${}^{\sigma}\dot{\mathrm{R}}^n$ mit Radius σ. Sei $\mathbb{U}$ die *Fuzzy-Menge*, $\mathbb{Q}$ die Menge der *Quaternionen*, $\mathbb{O}$ die der *Oktonionen* und $\mathbb{S}$ die der *Sedenionen*.△

Bemerkung: Das h-Homogenisieren trägt h vom Ursprung ausgehend in jeder Dimension ab. Zwischen Zahlen liegende Elemente sind auf die nächstgelegenen h-homogenen Elemente zu runden. Hierbei geben die Logarithmen zur Basis 2 (s. Nichtstandardanalysis) ${}_2\nu$, ${}_2\omega$ und ${}_2\tilde{\iota}$ die maximale Anzahl der Vor- wie Nachkommastellen der Elemente von $\tilde{\nu}$-${}^{\nu}\mathbb{R}$, $\tilde{\omega}$-${}^{\omega}\mathbb{R}$ und (ι-)$\mathbb{R}$ an.

Hauptsatz der Mengenlehre: Die Menge $\mathbb{R}$ ist ein maximaler, linear geordneter, abgeschlossener, kontinuierlicher und ι-homogener Körper mit $|\mathbb{R}| = 2\tilde{\iota}^2 + 1$, da h-homogenisierte Elemente mit Abstand ι Kontinuität garantieren, obwohl der genaue Wert von ι unbestimmt ist.□

Bemerkung: Somit existieren irrationale Zahlen nicht und $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ sowie $\mathbb{C}$ sind h-homogen, was das Erdős-Ulam-Problem löst. Da die Rekonstruktion reeller Zahlen mit notwendig periodischer Bruchentwicklung eindeutig ist, schränkt die h-Homogenität nicht wesentlich ein. Eine vollständige Homogenität (d. h. in allen Richtungen) höherdimensionaler reeller Räume ist nicht möglich, wie eine einfache Überlegung zu Kreisen bzw. Kugeln zeigt – auch bei Aufrollen eindimensionaler Räume.

Folgerung: Für jede nicht-leere Menge lässt sich eine lineare Ordnung definieren.□

Bemerkung: Anders als herkömmlich lassen sich jeweils unmittelbare Vorgänger und Nachfolger angeben. Anschaulich ist werden Perlen zu einer Kette aufgefädelt, wobei die Anzahl der Dimensionen unerheblich ist. Die lineare Ordnung einzelner Punkte kann für den $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ bspw. Dimension für Dimension geschehen: Die Gesamtlänge der Kette beträgt dann $\iota|\mathbb{R}|^n$. Eine andere lineare Ordnung ist die bei 01_n beginnende spiralförmige nach der euklidischen Norm der einzelnen Punkte.

Bemerkung: Die Mengenlehre insgesamt ist natürlich umfangreicher, da hier nur wesentliche (neue) Gedanken präsentiert wurden. Nur böse Zungen behaupten, dass falsch sei, was an der Cantorschen Mengenlehre nicht trivialerweise richtig ist. Fest steht jedoch, dass letztere in weiten Teilen nicht aufrechterhalten

werden kann, aber trotzdem noch genügend interessante Ideen enthält, die weiterverfolgt werden sollten. Eine nähere Wertung soll hierbei allerdings aus Gerechtigkeitsgründen unterbleiben.

Nichtstandardanalysis

Vorbemerkung: Im Folgenden gelten die Definitionen aus Mengenlehre sowie Topologie und es sei zumeist $m, n \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$. Die Integration und Differentiation in beliebigen stets nicht-leeren Teilmengen A von ${}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ wird untersucht. Das Abbildungskonzept verlangt, jedes außerhalb der Bildmenge abgebildete Element durch das jeweils nächste der Zielmenge zu ersetzen, im Fall der Nichteindeutigkeit durch Auswahl eines von ihnen. Das Folgende lässt sich leicht auf andere Mengen und Normen verallgemeinern.

Definition: Die Abbildung $\|\cdot\|: \mathbb{V} \to {}^{(\omega)}\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\mathbb{V}$ Vektorraum über ${}^{(\omega)}\mathbb{K}$ heißt *Norm*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{V}$ und alle $\lambda \in {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ gilt: $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ (*Definitheit*), $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (*Homogenität*) und $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Dreiecksungleichung*). Die *Dimension* von $\mathbb{V}$ als der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren wird mit $\operatorname{Dim} \mathbb{V}$ bezeichnet. Existieren $s, t \in [\tilde{\nu}, \nu]$ mit $s\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq t\|x\|_b$ für alle $x \in \mathbb{V}$, heißen die Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ *äquivalent*. Sei N die Menge aller Normen in $\mathbb{V}$.△

Satz: Normen sind genau dann äquivalent, wenn $\|x\|_a/\|x\|_b$ für alle $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b \in N$ und alle $x \in \mathbb{V}^*$ gilt, da sich $s := \min\{\|x\|_a/\|x\|_b : x \in \mathbb{V}^*\}$ und $t := \max\{\|x\|_a/\|x\|_b : x \in \mathbb{V}^*\}$ setzen lässt.□

Minimalitätssatz: Für jedes $r \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$ Nachkommastellen liefert die geometrische Reihe (GR) eine eindeutige b-adische Entwicklung und $\min\{b \in \mathbb{R}_{>1}\} = 2$, wobei $(1 - b^{-n})/(1 - b^{-1}) < 2$ gilt.□

Bemerkung: Für $b \in]1, 2[$ geht die Eindeutigkeit verloren und es müssen zwei für die Dualdarstellung vorgesehene Ziffern (0 und 1) verwendet werden: *Eine* Ziffer ist nur für die Basis $b = 1$ sinnvoll.

Definition: Für die *charakteristische Funktion* χ gelte $\chi_A(a) := 1$ für $a \in A$ und $\chi_A(a) := 0$ für $a \notin A$. In $\dot{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ lässt sich mit $\infty \gg \tilde{\iota}^2$ wie mit einer Konstanten rechnen. Sei $\operatorname{sgn}(z) := \tilde{z}|z|\chi_{\mathbb{C}^*}(z)$ für komplexe z und $\operatorname{sgn}(x) := \tilde{x}|x|\chi_{\dot{\mathbb{R}}^*}(x)$ für reelle x. Der Flächeninhalt von ${}^1\dot{\mathbb{R}}^2$ ergibt die *Kreiszahl* π. Die Lösung von $x^{\pi} = -1$ sei die *Eulersche Zahl* ϵ (kurz gesprochen: "eps"). Dann definiert $\epsilon^{\ln z} = z$ eine *Logarithmusfunktion* ln und die *Potenzfunktion* $z^s = \epsilon^{s \ln z}$ mit $s, z \in \mathbb{C}$. Die *Exponentiation* lässt sich so (formal) festlegen.△

Bemerkung: Das Ersetzen von ± 0 durch $\pm\tilde{\infty}$ macht Berechnungen eindeutig und widerspruchsfrei. Die Definition von ϵ ist $\mathcal{O}(\tilde{\nu})$ größer als die durch $(1 + \tilde{\nu})^{\nu}$ (Rechnen mit Näherungen!): Die exakt differenzierte Exponentialreihe mit möglichst vielen Gliedern rechtfertigt erstere.

Definition: Die Funktion $\mu_h: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ für eine m-dimensionale Menge $A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{C}^n$ mit $h \in \mathbb{R}_{>0}$ kleiner gleich dem Minimalabstand der Punkte in A, $m \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\leq \hat{n}}$ und $\mu_h(A) := |A|\, h^m$ sowie $\mu_h(\emptyset) = |\emptyset| = 0$ heißt *exaktes h-Maß* von A und A *h-messbar*. Das *exakte Standardmaß* sei μ_ι (ggf. ohne Angabe von ι).△

Bemerkung: Da die Vereinigung A paarweise disjunkter h-homogener Mengen A_i mit $i \in I \subseteq \mathbb{N}$ offenbar additiv und eindeutig $\mu_h(A) = \bigplus_{i \in I} \mu_h(A_i)$ ergibt, wird das Maßproblem neu positiv beantwortet. Die strenge Monotonie folgt für h-homogene Mengen $A_1, A_2 \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ mit $A_1 \subset A_2$ aus $\mu_h(A_1) < \mu_h(A_2)$. Ist h nicht bei allen betrachteten Mengen A_i gleich, so wird das Minimum von allen h gewählt und homogenisiert wie in der Mengenlehre beschrieben. Im Folgenden sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm.

Beispiele: Besteht $A \subset [0, 1[^n$ aus Punkten mit kleinstwertigem Bit 1 (0) in allen $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ Koordinaten, so gilt $\mu_\iota(A) = \tilde{2}^n$. Da A eine unendliche und herkömmlich nicht abzählbare Vereinigung einzelner Punkte ist ohne Nachbarpunkte aus $[0, 1[^n$ in A und diese Punktmengen Lebesgue-Nullmengen darstellen, ist A nicht Lebesgue-messbar, wohl aber exakt messbar. Dichter zusammengeschobene Gebiete aus ${}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ haben keine kleinere (größere) Durchschnittsmenge (Vereinigungsmenge) als zuvor.

Bemerkung: Das exakte h-Maß misst optimal, da es nur die NRen eines Punktes berücksichtigt, d. h. im Extremfall die Abstände der Punkte parallel zu den Koordinatenachsen. Begriffe wie σ-Algebra oder Nullmengen sind entbehrlich, da die leere Menge $\emptyset$ als einzige Nullmenge ausreicht.

Definition: Die irreflexive symmetrische *NR* $B \subseteq A^2$ beschreibt benachbarte Punkte in A. Die Funktion $\gamma: C \to A \subseteq \mathbb{C}^n$ mit einem h-homogenen $C \subseteq \mathbb{R}$ und infinitesimalem h heißt *Weg*, wenn $\|\gamma(x) - \gamma(y)\|$ für benachbarte $x, y \in C$ infinitesimal ist und $(\gamma(x), \gamma(y)) \in B$ gilt. Sei $z_0 \in A \subseteq \mathbb{K}^n$ und $f: A \to {}^{(\nu)}\mathbb{K}^m$. NRen werden stets als (Vorgänger, Nachfolger) in der Form $(z_0, \vec{z}_0)$ oder $(\vec{z}_0, z_0)$ notiert, wobei $\rightharpoonup$ "post" und $\leftharpoonup$ "prä" gesprochen und B nicht explizit erwähnt wird, sofern es aus dem Zusammenhang klar ist.

Definition: Gilt für infinitesimales $\alpha \in {}^{(\omega)}\mathbb{R}_{>0}$ die Beziehung $\|f(\vec{z}_0) - f(z_0)\| < \alpha$, heißt f α-*nachfolgerstetig* in z_0 in Richtung $\vec{z}_0$. Spielt der genaue Betrag von α keine Rolle, darf α weggelassen werden. Ist f für alle z_0 und $\vec{z}_0$ α-nachfolgerstetig, so handelt es sich schlicht um α-Stetigkeit. Hierbei heißt α der *Grad* der Stetigkeit. Gilt die Ungleichung nur für $\alpha = \tilde{v}$, handelt es sich schlicht um (Nachfolger-) Stetigkeit.△

Beispiel: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \{\pm 1\}$ mit $f(x) = \underline{1}^{\tilde{\iota}\hat{x}}$ ist in $\mathbb{R}$ nirgends nachfolgerstetig, wohl aber ihr Betrag (vgl. Zahlentheorie). Hierbei ist $\tilde{\iota}x$ aufgrund der ι-Homogenität von $\mathbb{R}$ ganzzahlig. Wird $f(x) = 1$ für endliche Brüche x gesetzt und $= -1$ andernfalls, so ist $f(x)$ in den unendlichen Brüchen x teilweise ι-nachfolgerstetig im Gegensatz zur herkömmlichen Auffassung.

Beispiel einer Peanokurve (vgl. [739], S. 188): Sei $g\colon {}^{\omega}\mathbb{R} \to {}^{\omega}\mathbb{R}$ gerade, periodisch mit der Periode 2 und in $I := [0, 1]$ gegeben durch $g(s) = \chi_{[1,\tilde{3}]}(\tilde{s}) + \chi_{]\tilde{3},3[}(\tilde{s})(3s - 1)$. Die Funktion $\phi\colon I \to {}^{\omega}\mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$\phi(s) = \left(+_{n=0}^{\omega} \tilde{2}^{\hat{n}} g\left(4^{\hat{n}} s\right), +_{n=0}^{\omega} \tilde{2}^{\hat{n}} g\left(4^{\hat{n}+1} s\right)\right).$$

Die Funktion ϕ ist mindestens stetig, da die Summen lokal letztlich lineare Funktionen in s sind. Dass sich so I bijektiv auf I^2 abbilden ließe, ist ein Irrtum: die Viererpotenzen in der Funktion g und die von g angenommenen Werte 0 und 1 in zwei Teilintervallen dünnen I^2 so stark aus, dass eine Bijektion unmöglich ist. Den Beweis auf endliche Brüche zu beschränken, ist schlicht unzureichend.

Definition: Für $f\colon A \to {}^{(\omega)}\mathbb{K}^m$ heißt $\downarrow f(\vec{z}) := f(\vec{z}) - f(z)$ *Nachfolger-Differential* von f in Richtung $\vec{z}$ in $z \in A$. Ist Dim $A = n$, so steht $\downarrow f(\vec{z})$ für eine Nachfolgerableitung in jeder Variablen. Gemischte Differentiale werden durch mehrere Pfeile gekennzeichnet. Sind sie unwichtig, werden sie weggelassen. Gilt $f(z) = z$, lässt sich $\downarrow \vec{z}$ statt $\downarrow f(\vec{z})$ schreiben. Klare A oder B bleiben unerwähnt.△

Definition: Hierbei wird $\downarrow$ "ab" gesprochen. Gilt $|f(\vec{x}) - f(x)| > \tilde{\omega}$ für ein x von $f\colon A \subseteq {}^{\omega}\mathbb{R} \to {}^{\omega}\mathbb{R}$, so heißt x *Sprungstelle*. Ist der Betrag des Nachfolger-Differentials von f in Richtung $\vec{z}$ in $z \in A$ kleiner als α und infinitesimal, so ist f dort auch α-nachfolgerstetig. Eine (unendlich) reellwertige Funktion $f\colon A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n \to {}^{\omega}\mathbb{R}$ heißt *konvex (konkav)* (in Zeichen $f \in Con(A)$), wenn ihr Graph unterhalb (oberhalb) oder auf jeder Verbindungsstrecke zweier seiner Punkte liegt. Kann "oder auf" entfallen, gilt dies *streng*.△

Satz: Mit $A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ sind alle $f \in Con(A)$ α-nachfolgerstetig und nachfolgerdifferenzierbar.□

Definition: Die m arithmetischen Mittel aller $f_k(\vec{z})$ von $f(z)$ bilden die m *gemittelten genormten Tangentialnormalenvektoren* von m eindeutig bestimmten Hyperebenen, die die mn stetigen Ableitungen für die Jacobi-Matrix eines nicht unbedingt stetigen f liefern. Die Hyperebenen werden dabei so angesetzt, dass sie jeweils durch $f_k(\vec{z})$ und das nach 0 translatierte $f(z)$ gehen. Den Betrag ihrer Koeffizienten minimiert ein sehr einfaches linear lösbares lineares Programm (vgl. Lineare Optimierung).△

Definition: Die *Nachfolgerableitung* in Richtung $\vec{z}_k$ von $F\colon A \to {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ in $z = (z_1, ..., z_n) \in A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ mit $k \in \mathbb{N}^*_{\leq n}$ ergibt sich als

$$\frac{\downarrow F(\vec{z})}{\downarrow \vec{z}_k} := \frac{F(z_1, \dots, \vec{z}_k, \dots, z_n) - F(z)}{\vec{z}_k - \mathrm{z}_k}.$$

Definition: Die Ableitung einer Funktion $f\colon A \to {}^{(\omega)}\mathbb{R}$ mit $A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{R}$ sei genau dann 0, wenn 0 im Intervall mit den Grenzen der exakten Vorgänger- und Nachfolgerableitung liegt oder wo f unstetig ist. Differenzierbarkeit ist also immer gegeben. Sei $\mathrm{num}(x) = p \in \mathbb{Z}$ die *Zählerfunktion* und $\mathrm{den}(x) = |q| \in \mathbb{N}^*$ die *Nennerfunktion* von $x = p/q \in \mathbb{R}$ mit teilerfremden p und q (in Zeichen: $p \perp q$).

Gilt mit den Bezeichnungen von oben für eine Funktion $f = (f_1, ..., f_n)\colon A \to {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ mit $z \in A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$

$$f(\vec{z}) = \left(\frac{F(\vec{z}_1, z_2, \dots, z_n) - F(z_1, \dots, z_n)}{\vec{z}_1 - \mathrm{z}_1}, \dots, \frac{F(z_1, \dots, z_{n-1}, \vec{z}_n) - F(z_1, \dots, z_n)}{\vec{z}_n - z_n}\right) = \left(\frac{\downarrow F_1(\vec{z})}{\downarrow z_1}, \dots, \frac{\downarrow F_n(\vec{z})}{\downarrow \vec{z}_n}\right),$$

so heißt $f(\vec{z}) = \nabla F(\vec{z})$ mit dem *Nabla-Operator* ∇ die *exakte Nachfolger-Ableitung* ${}^1F(\vec{z})$ bzw. der *exakte Nachfolger-Gradient* grad $F(\vec{z})$ der dann in Richtung $\vec{z}$ *exakt differenzierbaren* Funktion $F(z)$.

Gilt dies für alle $z \in A$, so heißt F *exakt differenzierbare Stammfunktion (SF)* von f. Die Übereinstimmung der Ableitungen in allen Richtungen heißt *Holomorphie*. ($A = {}^{\nu}\mathbb{C}$ und $n = 1$ machen F herkömmlich holomorph). Auf einem Bereich $\mathbb{D}$ sei $\mathcal{O}(\mathbb{D}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C}$ der *Ring holomorpher* bzw. *stetiger Funktionen*.△

Kettenregel: Für $x \in A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{R}$, $B \subseteq A^2$, $g: A \to C \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{R}$, $D \subseteq C^2$, $f: C \to {}^{(\omega)}\mathbb{R}$ gilt bei Wahl von $g(\vec{x}) = \vec{g}(x)$,

$$ {}^1f(g(x)) = {}^1f(g(x))\,{}^1g(x). $$

Beweis:

$$ {}^1f(g(x)) = \frac{f(g(\vec{x})) - f(g(x))}{g(\vec{x}) - g(x)} \frac{g(\vec{x}) - g(x)}{\vec{x} - x} = \frac{f(\vec{g}(x)) - f(g(x))}{\vec{g}(x) - g(x)}\,{}^1g(x) = {}^1f(g(x))\,{}^1g(x). \square $$

Produktregel: Addition und Subtraktion von $f(\vec{x})g(x)$ bzw. $f(x)g(\vec{x})$ im Zähler ergibt

$$ {}^1(fg)(x) = {}^1f(x)g(x) + f(\vec{x})\,{}^1g(x) = {}^1f(x)g(\vec{x}) + f(x)\,{}^1g(x)\,. $$

Quotientenregel: Das gleiche mit $f(x)g(x)$ bzw. $f(\vec{x})g(\vec{x})$ ergibt für Nenner $\neq 0$ der folgenden Quotienten

$$ {}^1\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{{}^1f(x)g(x) - f(x)\,{}^1g(x)}{g(x)g(\vec{x})} = \frac{{}^1f(x)g(\vec{x}) - f(\vec{x})\,{}^1g(x)}{g(x)g(\vec{x})}. $$

Bemerkung: Hierbei müssen die Argumente und Funktionswerte einer kleineren Unendlichkeitsstufe als $\tilde{\iota}$ angehören sowie f und g in $x \in A$ hinreichend (α-)stetig sein. D. h. α muss klein genug sein, um $\vec{x}$ durch x ersetzen zu können. Analoges gilt für infinitesimale Argumente. Die exakte Ableitung der Umkehrfunktion lautet ${}^1f^{-1}(y) = 1/{}^1f(x)$ aus $y = f(x)$ und der Identität $x = f^{-1}(f(x))$ mithilfe der Kettenregel bei gleicher Genauigkeit. Die Regel von de l'Hospital ist für (α-)stetige Funktionen f und g sinnvoll und ergibt sich für $f(v) = g(v) = 0$ mit $v \in A$ sowie $g(\vec{v}) \neq 0$ aus

$$ \frac{f(\vec{v})}{g(\vec{v})} = \frac{f(\vec{v}) - f(v)}{g(\vec{v}) - g(v)} = \frac{{}^1f(\vec{v})}{{}^1g(\vec{v})}. $$

Bemerkung: Wo der Quotient definiert ist, lässt sich im (herkömmlich) (unendlich) reellen Fall die exakte Ableitung alternativ auch überall ${}^1F(\vec{v}) := f(\vec{v}) - f(\overleftarrow{v})/(\vec{v} - \overleftarrow{v})$ setzen. Vor allem wenn $\vec{v} - v = v - \overleftarrow{v}$ ist und die zusammengefassten Ableitungen gleiches Vorzeichen haben, hat dies den Vorteil ${}^1F(\vec{v})$ eher als "Tangentensteigung" im Punkt v aufzufassen, z. B. wenn F α-stetig in v ist. Die Übertragung ins (herkömmlich) Komplexe erfolgt analog.

Definition: Mit $z \in A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ heißt $\uparrow_{z\in A} f(z)\downarrow z := +_{z\in A} f(z)(\vec{z} - z)$ das *exakte Nachfolgerintegral* eines *Vektorfeldes* $f = (f_1, ..., f_n): A \to {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ in A und $f(z)$ *exakt integrierbar*. Das Entfernen mindestens eines Punktes aus A macht hier das exakte Integral *uneigentlich*. Es wird ↑ "auf" gesprochen. Für γ: $G = [a, b[\cap C \to A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$, $C \subseteq \mathbb{R}$ und $f = (f_1, ..., f_n): A \to {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ heißt $\uparrow_\gamma f(\zeta)\downarrow\zeta = \uparrow_{s\in G} f(\gamma(s))\,{}^1\gamma(s)\downarrow s$ mit $\downarrow s > 0$, $\vec{s} \in]a, b] \cap C$ bei Wahl von $\vec{\gamma}(s) = \gamma(\vec{s})$ wegen $\zeta = \gamma(s)$ und $\downarrow\zeta = \gamma(\vec{s}) - \gamma(s) = {}^1\gamma(s)\downarrow s$ (z. B. für $C = \mathbb{R}$, B maximal in ${}^{\omega}\mathbb{C}^2$ und D maximal in ${}^{\omega}\mathbb{R}^2$) das *exakte Kurvenintegral (KI) eines Vektorfeldes f* längs des Weges γ. Uneigentliche exakte KIe werden analog den exakten Integralen definiert, ohne das Entfernen von Intervallendpunkten von G zuzulassen. Es wird $u\restriction_k := u_k$ in $(u_1, ..., u_n) \in {}^{\omega}\mathbb{K}^n$ "u proj k" gesprochen.△

Satz, der den von Froda verbessert: Eine monotone Funktion $f: [a, b] \to {}^{\omega}\mathbb{R}$ hat maximal $2\omega^2 - 1$ Sprungstellen, da zwischen $-\omega$ und ω sind maximal $2\omega^2$ Sprünge von $\tilde{\omega}$ möglich und die Funktion außer an den Sprungstellen wie eine Treppenfunktion ihre Werte halten kann.□

Satz von Laisant: Für $c \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ ergibt die Produktregel $\uparrow f(x) \downarrow x|_{f^{-1}(y)} = \uparrow y\frac{\downarrow x}{\downarrow y}\downarrow y = yf^{-1}(y) - \uparrow f^{-1}(y)\downarrow y + c$.□

Bemerkung: Das (lineare) exakte KI erfordert kein stetiges f, existiert immer und stimmt mit dem herkömmlichen KI auf ${}^{(\nu)}\mathbb{K}$ weitgehend überein. Es ist im (herkömmlich) (unendlich) reellen Fall monoton.

Zwischenwertsatz: Sei $f: [a, b] \to {}^{(\omega)}\mathbb{R}$ α-stetig in $[a, b]$. Dann nimmt $f(x)$ für $x \in [a, b]$ jeden Wert zwischen $\min f(x)$ und $\max f(x)$ mit einer Genauigkeit $< \alpha$ an. Ist f in ${}^{\omega}\mathbb{R}$ stetig, nimmt es jeden Wert von ${}^{\nu}\mathbb{R}$ zwischen $\min f(x)$ und $\max f(x)$ an.

Beweis: Mit jeweils $f(x)$ als Mittelpunkt existiert zwischen $\min f(x)$ und $\max f(x)$ eine lückenlose Kette von sich überlappenden α-Umgebungen, da sonst ein Widerspruch zur α-Stetigkeit von f entstünde. Der

zweite Teil der Behauptung folgt aus der Tatsache, dass eine Abweichung $|f(\vec{x}) - f(x)| < \tilde{v}$ in ${}^{v}\mathbb{R}$ die herkömmlich maximal zugelassene Auflösung unterschreitet.□

Bemerkung zum Satz vom Minimum und Maximum: Die stetige Funktion $f(x) := \widehat{\omega}\sin(\omega x)$ nimmt für $x \in [-1, 1]$ die Minima $-\widehat{\omega}$ und die Maxima $\widehat{\omega}$ als unendliche Werte an.

Beispiel: Die $\hat{\imath}$-stetige Funktion $f\colon {}^{(\omega)}\mathbb{R} \to \{0, \iota\}$ mit $f(x) := \check{\imath}(\underline{1}^{\hat{x}\tilde{\imath}} + 1)$ besitzt nur die lokalen Minima 0 bzw. lokalen Maxima ι sowie die links- bzw. rechtsseitigen exakten Ableitungen ± 1.

Beispiele: In ([763], S. 160) gilt $r_1 = r_2 = 3$. Mit $q = \mathrm{den}(x)$ und $f(x) := \chi_{\underset{\omega}{\omega}\mathbb{R}}(x) i^{\hat{q}} \tilde{q} \acute{q}$, hat $f\colon [0, 1] \to [\acute{\imath}, -\acute{\imath}]$ die beiden relativen Extrema $\pm\acute{\imath}$ (vgl. ebd. S. 24).

Definition: Für alle $x \in V$ eines h-homogenen n-Volumens $V \subseteq [a_1, b_1]\times\ldots\times[a_n, b_n] \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{R}^n$ mit $B = B_1\times\ldots\times B_n$, $B_k \subseteq [a_k, b_k]^2$ und $|\downarrow x_k| = h$ für alle $k \in \mathbb{N}^*_{\leq n}$ heißt mit $f(x) := 0$ für alle $x \in {}^{(\omega)}\mathbb{R}^n \setminus V$

$$\uparrow_{x\in V} f(x)\downarrow x \coloneqq \uparrow_{x\in V} f(x)\downarrow(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq \uparrow_{a_n}^{b_n} \ldots \uparrow_{a_1}^{b_1} f(x)\downarrow x_1 \ldots \downarrow x_n$$

das *exakte Volumenintegral* über eine dann *volumenintegrierbare* Funktion $f\colon {}^{(\omega)}\mathbb{R}^n \to {}^{(\omega)}\mathbb{R}$.△

Bemerkung: Die Isomorphie von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ liefert im Komplexen Entsprechendes und $\uparrow_{x\in V} \downarrow x \coloneqq \mu_h(V)$.

Beispiel: Mit dem exakten Volumenintegral im Gegensatz zum Lebesgue-Integral erfüllt

$$\|f\|_p \coloneqq (\uparrow_{x\in V} \|f(x)\|^p \downarrow x)^{\tilde{p}}$$

für beliebiges $f\colon {}^{(\omega)}\mathbb{R}^n \to {}^{(\omega)}\mathbb{R}^m$ und $p \in [1, \omega]$ alle Eigenschaften einer Norm, auch die Definitheit.

Beispiel: Sei $[a, b[\, \cap h^{\omega}\mathbb{Z} \neq \emptyset$ eine h-homogene Teilmenge von $[a, b[\, \cap {}^{\omega}\mathbb{R}$ mit $B \subseteq [a, b[\, \cap h^{\omega}\mathbb{Z} \times]a, b] \cap h^{\omega}\mathbb{Z}$. Sei ferner T eine SF von einer in $[a, b[\, \cap h^{\omega}\mathbb{Z}$ nicht notwendig konvergenten Taylorreihe (TR) t und $f(x) := t(x) + \varepsilon\underline{1}^{\hat{x}/h}$ mit herkömmlich reellen x und $\varepsilon \geq \tilde{v}$. Für $h = \tilde{v}$ ist f weder stetig noch herkömmlich differenzierbar bzw. integrierbar in $[a, b[\, \cap h^{\omega}\mathbb{Z}$, aber es gilt exakt für alle h

$${}^{1}f(x) = {}^{1}t(x) - \widetilde{\downarrow x}\hat{\varepsilon}\underline{1}^{\hat{x}/h}$$

und

$$\uparrow_{x\in[a,b[\, \cap h^{\omega}\mathbb{Z}} f(x)\downarrow x = T(b) - T(a) + \check{\varepsilon}\left(\underline{1}^{\hat{a}/h} - \underline{1}^{\hat{b}/h}\right).$$

Beispiel: Die herkömmlich nicht messbare Mitteldrittel-Cantormenge $C_{\tilde{3}}$ hat das Maß $\mu_\iota(C_{\tilde{3}}) = \check{3}^{-\omega}$. Sei die Funktion $c\colon [0, 1] \to \{0, \check{3}^{\omega}\}$ definiert durch $c(x) = \check{3}^{\omega}\chi_{C_{\tilde{3}}}(x)$. Dann gilt

$$\uparrow_{x\in[0,1]} c(x)\downarrow x = +_{x=0}^{1} c(x)\downarrow x = \check{3}^{\omega}\mu_\iota(C_{\tilde{3}}) = 1.$$

Definition: Eine *Folge* (a_k) mit *Folgengliedern* a_k ist eine Abbildung von ${}^{(\omega)}\mathbb{Z}$ nach ${}^{(\omega)}\mathbb{C}^m$: $k \mapsto a_k$. Eine *Reihe* ist eine Folge (s_k) mit $m \in {}^{(\omega)}\mathbb{Z}$, dem *Konvergenzradius* r und den *Partialsummen* $s_k = +_{j=m}^{k} a_j$. Eine Folge (a_k) mit $k \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}^*$, $a_k \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ und $\alpha \in]0, \tilde{v}]$ heißt *α-konvergent gegen* $a \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$, wenn es ein $m \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}^*_{\leq k}$ gibt, sodass $|a_k - a| < \alpha$ für alle a_k und nicht zu kleinem $k - m$ gilt. Die Menge α-A aller solchen a heißt *α-Grenzwertmenge* von (a_k), der aus ihr (z. B. als letzter oder Mittelwert) bestimmte eindeutige Repräsentant *α-Grenzwert* α-a. Für speziell $a = 0$ ergibt sich eine *Nullfolge*. Gilt die Ungleichung lediglich für $\alpha = \tilde{v}$, so darf α- entfallen. Meistens wird k maximal und α minimal gewählt.△

Bemerkung: Herkömmliche Grenzwerte sind kaum genauer als $\mathcal{O}(\widetilde{\omega})$. Ihre tatsächliche Rationalität oder reine Algebraizität wird selten beachtet! Um die Relevanz ausschließlich des größten Indexes zu vermeiden (vgl. [813], S. 144), wäre in der herkömmlichen Formulierung zu ergänzen, dass sich stets unendlich viele bzw. fast alle Folgenglieder mit beliebig kleinem Abstand zum Grenzwert und nur endlich viele mit größerem finden lassen. Erst dann gilt das Monotonieprinzip (vgl. a. a. O. S. 155).

Bemerkung: Der Hauptsatz der Mengenlehre macht die Darstellung jeder positiven Zahl durch einen eindeutig bestimmten unendlichen Dezimalbruch haltlos (vgl. S. 27 f.). Wird $\varepsilon := \iota$ gesetzt, werden alle Beweise falsch, die für $\varepsilon \in {}^{(\omega)}\mathbb{R}_{>0}$ – speziell für alle $\varepsilon \in {}^{(v)}\mathbb{R}_{>0}$ – behaupten, dass eine reelle Zahl $\varepsilon\tilde{r}$ mit reellem $r \in$

${}^{(\omega)}\mathbb{R}_{>1}$ existiere. Andererseits kann ein infiniter Regress entstehen. Die εδ-Definition des Grenzwertes (fragliche Existenz von δ, S. 235 f.) benötigt ε als ein gewisses Vielfaches von ι.

Bemerkung: Dies gilt auch für die εδ-Definition der Stetigkeit (vgl. S. 215). Die jeden reellen Wert verdoppelnde reelle Funktion entbehrt gleichmäßiger Stetigkeit, da sich generell $\delta := \iota$ und ε entsprechend größer setzen lässt. Erfüllen zwei Funktionswerte die Bedingungen nicht, dann ist die Funktion dort auch nicht stetig. Also ist Stetigkeit bei Wahl des größten von allen gültigen infinitesimalen ε zur gleichmäßigen äquivalent. Die Äquivalenz zur Hölder-Stetigkeit ebenso leicht zeigen.

Bemerkung: Hier ist ggf. eine unendliche reelle Konstante zuzulassen. Das Gleiche gilt für gleichmäßige Konvergenz, da sich als alles erfüllender Index das Maximum der Indizes wählen lässt, der für jedes Argument gilt. Hier reicht stets $\acute{\omega}$ aus. Andernfalls fehlt auch die punktweise Konvergenz. Also ist gleichmäßige Konvergenz bei Wahl des größten von allen gültigen infinitesimalen ε zur punktweisen äquivalent.

Satz von Fubini: Für $X, Y \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ mit $f\colon X\times Y \to {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ ergibt ein Umordnen der Integralsummen

$$\uparrow_Y\uparrow_X f(x,y)\downarrow x\downarrow y = \uparrow_{X\times Y} f(x,y)\downarrow(x,y) = \uparrow_X\uparrow_Y f(x,y)\downarrow y\downarrow x. \square$$

Beispiel: Mit $r_\pm^2 := x^2 \pm y^2$ ergibt sich gemäß dem Spätesteinsetzungsprinzip (s. u.)

$$\uparrow_{[a,b[\times[c,d[}\ \tilde{r}_+^4 r_-^2\downarrow(x,y) = \uparrow_a^b \tilde{r}_+^2 y\downarrow x|_c^d = -\uparrow_c^d \tilde{r}_+^2 x\downarrow y|_a^b = \arctan\tfrac{d}{b} - \arctan\tfrac{c}{b} + \arctan\tfrac{d}{a} - \arctan\tfrac{c}{a}$$

das ggf. uneigentliche Integral

$$I(a,b) := \uparrow_{[a,b[^2} \tilde{r}_+^4 r_-^2\downarrow(x,y) = \arctan\tfrac{b}{b} - \arctan\tfrac{a}{b} + \arctan\tfrac{b}{a} - \arctan\tfrac{a}{a} = \breve{\pi} - \breve{\pi} = 0$$

und nicht

$$I(0,1) := \uparrow_0^1\uparrow_0^1 \tilde{r}_+^4 r_-^2\downarrow y\downarrow x = \uparrow_0^1 \tfrac{\downarrow x}{1+x^2} = \tfrac{\pi}{4} \neq \tfrac{\pi}{4} = -\uparrow_0^1 \tfrac{\downarrow y}{1+y^2} = \uparrow_0^1\uparrow_0^1 \tilde{r}_+^4 r_-^2\downarrow x\downarrow y = I(0,1).$$

Vertauschungssatz: Vollständige (transfinite) Induktion erweist das Ergebnis mehrfacher Ableitungen einer Funktion $f\colon A \to {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ als unabhängig von der Reihenfolge, solange erst zum Schluss Variablen durch Werte ersetzt oder Grenzwerte gebildet werden, falls erforderlich (*Spätesteinsetzungsprinzip*).□

Beispiel: Für $f\colon {}^{\omega}\mathbb{R}^2 \to {}^{\omega}\mathbb{R}$, $f(0,0) = 0$ und $f(x,y) = \tilde{r}_+^2 xy^3$ gilt mit $r_\pm^2 := x^2 \pm y^2$:

$$\frac{\downarrow^2 f}{\downarrow x\downarrow y} = \tilde{r}_+^2(y^6 + 6x^2y^4 - 3x^4y^2) = \frac{\downarrow^2 f}{\downarrow y\downarrow x}$$

mit Wert $\tilde{2}$ an der Stelle (0, 0), obwohl nachfolgend für $x = 0$ links y und für $y = 0$ rechts 0 steht in

$$\frac{\downarrow f}{\downarrow x} = -\tilde{r}_+^4 r_-^2 y^3 \neq \tilde{r}_+^4(xy^4 + 3x^3y^2) = \frac{\downarrow f}{\downarrow y},$$

d. h. dann ergibt links die Ableitung nach y den Wert $1 \neq 0$, welches die nach x rechts ist.

Erster Hauptsatz der exakten Differential- und Integralrechnung für KIe: Die Funktion $F(z) = \uparrow_\gamma f(\zeta)\downarrow\zeta$ ist mit $\gamma\colon [d,x[\ \cap C \to A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}$, $C \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to {}^{(\omega)}\mathbb{K}$, $d \in G = [a,b[\ \cap C$ bei Wahl von $\vec{\gamma}(x) = \gamma(\vec{x})$ exakt differenzierbar und es gilt ${}^1F(z) = f(z)$ für alle $x \in G$ und $z = \gamma(x)$.

Beweis:
$$\begin{aligned}\downarrow F(z) &= \uparrow_{s\in[d,x]\cap C} f(\gamma(s))\,{}^1\gamma(s)\downarrow s - \uparrow_{s\in[d,x[\cap C} f(\gamma(s))\,{}^1\gamma(s)\downarrow s = \uparrow_x f(\gamma(s))\tfrac{\gamma(\vec{s})-\gamma(s)}{\vec{s}-s}\downarrow s\\ &= f(\gamma(x))\,{}^1\gamma(x)\downarrow x \quad = \quad f(\gamma(x))(\vec{\gamma}(x) - \gamma(x)) \quad = \quad f(z)\downarrow z. \square\end{aligned}$$

Zweiter Hauptsatz der exakten Differential- und Integralrechnung für KIe: Mit $\gamma\colon G \to {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ gilt wie oben vorausgesetzt

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \uparrow_\gamma {}^1F(\zeta)\downarrow\zeta.$$

Beweis:
$$\begin{aligned}F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) &= +_{s\in G} F(\vec{\gamma}(s)) - F(\gamma(s)) = +_{s\in G} {}^1F(\gamma(s))(\vec{\gamma}(s) - \gamma(ts))\\ &= {}^1F(\gamma(s))\,{}^1\gamma(s)\downarrow \quad = \quad \uparrow_\gamma {}^1F(\zeta)\downarrow\zeta.\end{aligned}$$

Korollar: Ist γ darüber hinaus ein geschlossener Weg (GW) mit SF F, gilt $\uparrow_\gamma f(\zeta)\downarrow\zeta = 0$. □

Integralformel: Damit ist für $f\colon A \to {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ und den GW $\gamma([a, b[) \subseteq A \to {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ genau dann (s. u.) $f(z)\,\mathrm{ind}_\gamma(z) = \underline{\tilde{\pi}}\uparrow_\gamma \widetilde{\zeta - z} f(\zeta)\downarrow\zeta$, wenn aus $g(\zeta) = \widetilde{\zeta - z}(f(\zeta) - f(z))$ folgt, dass $\uparrow_\gamma g(\zeta)\downarrow\zeta = 0$ gilt. □

Bemerkung: Dies trifft insbesondere zu, wenn g auf $\gamma([a, b[)$ eine SF besitzt. Beide Hauptsätze gelten im herkömmlich reellen Fall analog. Für $u, v \in G$, $u \neq v$ und $\gamma(u) = \gamma(v)$ ist $\bar{\gamma}(u) \neq \bar{\gamma}(v)$ erlaubt.

Bemerkung: Im ersten Hauptsatz wird die Ableitung $\downarrow F(z)/\downarrow z$ verschärft zum arithmetischen Mittel $\tilde{2}(f(z) + f(\bar{z}))$ bzw. zu $f(\tilde{2}(z + \bar{z}))$, im zweiten Hauptsatz $F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ zu $\tilde{2}(F(\gamma(b)) + F(\bar{\gamma}(b))) - \tilde{2}(F(\gamma(a)) + F(\bar{\gamma}(a)))$ bzw. zu $F(\tilde{2}(\gamma(b) + \bar{\gamma}(b))) - F(\tilde{2}(\gamma(a) + \bar{\gamma}(a)))$. Hierbei ergeben sich im hinreichend α-stetigen Fall von f bzw. von F am Rand nahezu die ursprünglichen Resultate.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe impliziert $\pm_{n=1}^{\omega}(\tilde{n} - \omega) = {}_\epsilon 2$.

Leibnizregel für Parameterintegrale: Für $f\colon {}^{(\omega)}\mathbb{K}^{\grave{n}} \to {}^{(\omega)}\mathbb{K}$, a, $e\colon {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n \to {}^{(\omega)}\mathbb{K}$, $\vec{x} := (s, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ und $s \in {}^{(\omega)}\mathbb{K} \setminus \{x_1\}$ gilt bei Wahl von $\vec{a}(x) = a(\vec{x})$ und $\vec{e}(x) = e(\vec{x})$

$$\frac{\downarrow}{\downarrow x_1}\left(\uparrow_{a(x)}^{e(x)} f(x,t)\downarrow t\right) = \left(\uparrow_{a(x)}^{e(x)} \frac{\downarrow f(x,t)}{\downarrow x_1}\downarrow t\right) + \frac{\downarrow e(x)}{\downarrow x_1} f(\vec{x}, e(x)) - \frac{\downarrow a(x)}{\downarrow x_1} f(\vec{x}, a(x)).$$

Beweis:

$$\frac{\downarrow}{\downarrow x_1}\left(\uparrow_{a(x)}^{e(x)} f(x,t)\downarrow t\right) = \left(\uparrow_{a(\vec{x})}^{e(\vec{x})} f(\vec{x},t)\downarrow t - \uparrow_{a(x)}^{e(x)} f(x,t)\downarrow t\right)/\downarrow x_1$$

$$= \left(\left(\uparrow_{a(x)}^{e(x)} (f(\vec{x},t) - f(x,t))\downarrow t\right) + \uparrow_{b(x)}^{e(\vec{x})} f(\vec{x},t)\downarrow t - \uparrow_{a(x)}^{a(\vec{x})} f(\vec{x},t)\downarrow t\right)/\downarrow x_1$$

$$= \left(\uparrow_{a(x)}^{e(x)} \frac{\downarrow f(x,t)}{\downarrow x_1}\downarrow t\right) + \frac{\downarrow e(x)}{\downarrow x_1} f(\vec{x}, e(x)) - \frac{\downarrow a(x)}{\downarrow x_1} f(\vec{x}, a(x)). \square$$

Anmerkung: Die Integration im Komplexen erlaubt einen Weg mit Anfangs- und Endpunkt als Integralgrenzen. Ist $\vec{a}(x) \neq a(\vec{x})$, so wird der letzte Summand mit $(\vec{a}(x) - a(x))/(a(\vec{x}) - a(x))$ multipliziert. Ist $\vec{e}(x) \neq e(\vec{x})$, so wird der vorletzte Summand mit $(\vec{e}(x) - e(x))/(e(\vec{x}) - e(x))$ multipliziert. Für folgende Beispiele (vgl. [813], S. 540 – 543) sei jeweils $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ und $x \in [0, 1]$:

1. Die Folge $f_n(x) = \sin nx/n^{\tilde{2}}$ strebt für $n \to \omega$ nicht gegen $f(x) = 0$, sondern gegen $f(x) = \tilde{\omega}^{\tilde{2}} \sin \omega x$ mit der (stetigen) Ableitung ${}^1f(x) = \omega^{\tilde{2}} \cos \omega x$ statt ${}^1f(x) = 0$.

2. Die Folge $f_n(x) = x - \tilde{n}x^n$ strebt für $n \to \omega$ gegen $f(x) = x - \tilde{\omega}x^\omega$ statt $f(x) = x$ mit der (stetigen) Ableitung ${}^1f(x) = 1 - x^{\acute{\omega}}$ statt ${}^1f(x) = 1$. Herkömmlich ist $f_n(x) = 1 - x^{\acute{n}}$ unstetig in $x = 1$.

3. Die Folge $f_n(x) = nx(-\acute{x})^n$ strebt für $n \to \omega$ nicht gegen $f(x) = 0$, sondern gegen die stetige Funktion $f(x) = \omega x(-\acute{x})^\omega$ und nimmt für $x = \tilde{\omega}$ den Wert $\tilde{\epsilon}$ an.

Definition: Die Richtung $w := \vec{z}$ ergibt die *zweite Ableitung* von $f\colon A \to {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ in $z \in A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ durch

$${}^2f(\vec{z}) := \frac{\downarrow^2 f(\vec{z})}{(\downarrow \vec{z})^2} := \frac{f(\vec{w}) - \hat{f}(\vec{z}) + f(z)}{(\downarrow \vec{z})^2}. \triangle$$

Bemerkung: Höhere Ableitungen werden analog definiert. Jede Anzahl $m_n \in {}^{\omega}\mathbb{N}$ für $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ der durchgeführten Ableitungen nach der n-ten Variable wird als Exponent hinter dieser notiert. Der im Zähler anzugebende Exponent ist die Summe aller m_n. Mit $1/(-1)! = 0$ gilt dann für g wie f und $p \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ die Leibnizsche Produktregel:

$${}^p(fg) = +_{m+n=p} \binom{p}{m} {}^m f\ {}^n g.$$

Beweis: Für $p = 1$ gilt die einfache Produktregel wie oben. Induktionsschritt von p nach $\grave{p}$:

$${}^{\grave{p}}(fg) \underset{p}{=} +_{m+1+n=\grave{p}} \left(\binom{p}{m} + \binom{p}{\grave{m}}\right) {}^{\grave{m}} f\ {}^n g + +_{m+1+n=\grave{p}} \binom{p}{m} {}^m f\ {}^{\grave{n}} g - +_{m+1+n=\grave{p}} \binom{p}{\grave{m}} {}^{\grave{m}} f\ {}^n g$$

$$= {}^p({}^1(fg)) \underset{1}{=} {}^p({}^1fg + f\,{}^1g) = {}^p({}^1fg) + {}^p(f\,{}^1g) = +_{m+n=\grave{p}} \binom{\grave{p}}{m} {}^m f\ {}^n g. \square$$

Satz von Taylor: Es gilt für $+_m \left|f^{(m)}(a)\right| > \tilde{\mathrm{v}}$, ${}^m f(a) \in {}^\omega\mathbb{C}$, $g(z) := (z-a)^\omega$, $|z-a| < \tilde{\epsilon}\omega$ und $z \to a \in {}^\omega\mathbb{C}$

$$f(z) = T_\omega(z) := +_{m=0}^{\omega} \widetilde{m!}\ {}^m f(a)(z-a)^m.$$

Beweis: Aus der Regel von de L'Hospital folgt dann mit der Leibnizschen Produktregel

$$f(z) = \frac{(fg)(z)}{g(z)} = \frac{{}^1(fg)(z)}{{}^1g(z)} = \cdots = \frac{{}^{\acute{\omega}}(fg)(z)}{{}^{\acute{\omega}}g(z)} = \frac{{}^\omega(fg)(z)}{{}^\omega g(z)} = \widetilde{\omega!}\ {}^\omega(fg)(z)$$

und

$${}^\omega(fg)(z) = +_{m+n=\omega} \binom{\omega}{m}\ {}^m f(a)\ {}^{\omega-m}g(z) = {}^\omega g(z) +_{m=0}^{\omega} \widetilde{m!}\ {}^m f(a)(z-a)^m\ . \square$$

Folgerung: Der zweite Hauptsatz liefert für das Restglied $R_n(z) := f(z) - T_n(z) = f(a) + \uparrow_a^z {}^1 f(t)\downarrow t - T_n(z)$ nach dem Mittelwertsatz mit $\zeta \in {}^a\dot{\mathbb{C}}(z)$ und $p \in \mathbb{N}^*_{\leq n}$

$$R_n(z) = \uparrow_a^z \widetilde{n!}\,(z-t)^n\ {}^{\grave{n}} f(t)\downarrow t = \widetilde{pn!}\,(z-\zeta)^{\grave{n}-p}\ {}^{\grave{n}} f(\zeta)(z-a)^p.$$

Induktionsbeweis mit partieller Integration und Induktionsschritt von $\acute{n}$ nach n ($\acute{n} = 0$ s. o.):

$$f(z) = T_{\acute{n}}(z) + \widetilde{n!}\,(z-a)^n\ {}^n f(a) + \uparrow_a^z \widetilde{n!}\,(z-t)^n\ {}^{\grave{n}} f(t)\downarrow t = T_n(z) + R_n(z). \square$$

Bemerkung: Es gilt $(\epsilon^\iota - 1)/\iota = 1 = {}^1\exp(0)$ und damit $\downarrow_\epsilon y/\downarrow y = \tilde{y}$ aus $\downarrow y/\downarrow x = y := \epsilon^x$ sowie $\downarrow x^n = \downarrow \epsilon^n\ \epsilon^x = nx^{\acute{n}}\downarrow x$ für $n \in {}^\omega\mathbb{N}^*$ nach der Produkt- bzw. Kettenregel. Einheitskreis und Dreiecke lassen leicht die Beziehungen $\sin \iota/1 = (\cos \iota - 1)/\iota$ und $\cos \iota/1 = -\sin \iota/\iota$ einsehen. Damit gilt ${}^1\sin(0) = \cos(0)$ und ${}^1\cos(0) = -\sin(0)$ sowie mit $m \in {}^\omega\mathbb{N}$ und $n = \hat{k}$ der Satz von Moivre:

$$\left(\cos z + \underline{sin}\ z\right)^m = \epsilon^{\underline{m}z} = 1 + +_{k=1}^{\breve{\omega}}\left(\widetilde{\hat{n}!}\,(\underline{m}z)^{\acute{n}} + \widetilde{n!}\,(\underline{m}z)^n\right) = \cos(mz) + \underline{\sin}(mz). \square$$

Eulersche Sinusformel: Nullstellensatz und Identitätssatz (vgl. [472], S. 41) für Reihen sowie der Satz oben liefern $\Gamma\left(\tilde{2}\right) = \pi^{\tilde{2}}$ für die Gammafunktion $\Gamma(z) := \omega!\,\omega^z / \times_{k=0}^{\omega} (z+k)$ mit $z \in {}^\mathrm{v}\mathbb{C} \setminus -{}^\mathrm{v}\mathbb{N}$ entsprechend aus

$$\frac{\epsilon^{\underline{\hat{\pi}}z} - 1}{\epsilon^{\underline{\pi}z}\underline{\hat{\pi}}z} = \frac{\epsilon^{\underline{\pi}z} - \epsilon^{-\underline{\pi}z}}{\underline{\hat{\pi}}z} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = +_{k=0}^{\omega} \frac{(\underline{\pi}z)^n}{\grave{n}!} = \times_{k=1}^{\omega} (1 - z^2/k^2) = \frac{\tilde{z}}{\Gamma(z)\Gamma(-\acute{z})},$$

da die $\hat{\omega}$ Nullstellen der linken und rechten Seite wegen $\epsilon^{\underline{\pi}n} = 1 + \sin 0$ übereinstimmen.$\square$

Folgerung: Damit ergibt sich das Wallis-Produkt zu $W := +_{k=1}^{\omega} k^2/\left(k^2 - \tilde{4}\right) = \breve{\pi}$ aus

$$\frac{\Gamma(\tilde{2})^2}{\widehat{W}} = \frac{\breve{\omega}4^{\grave{\omega}}\omega!^2}{(\hat{\omega}+1)!!^2}\frac{(\hat{\omega}+1)(\hat{\omega}-1)!!^2}{4^\omega\omega!^2} = \frac{\hat{\omega}}{\hat{\omega}+1} := 1 = \frac{\breve{\pi}}{W}. \square$$

Funktionalgleichung der Gammafunktion: Aus $\Gamma(\grave{z}) = z\Gamma(z)\omega/(\omega + \grave{z})$ und $\Gamma(1) := 1$ folgt für hinreichend kleine $|z|$ durch partielle Integration $\Gamma(\grave{z}) := \uparrow_0^\omega t^z\epsilon^{-t}\downarrow t = z\Gamma(z)$. Dies führt mit $z = \tilde{2}$ und der Substitution $x := t^{\tilde{2}}$ auf die für die Statistik und Kugelberechnung wichtige Gleichung $\uparrow_0^\omega \epsilon^{-x^2}\downarrow x = \tilde{2}\pi^{\tilde{2}}$.$\square$

Folgerung: Eine logarithmische Ableitung (s. [473], S. 324) ergibt die Gleichung $\uparrow_0^\omega \tilde{x}\sin x \downarrow x = \breve{\pi}$.$\square$

Stirlingformel: Mit $\theta = \alpha\omega$ gilt die asymptotische Näherung $\grave{\theta}^{-1} <_\epsilon \left(\omega!/\,(\hat{\pi}\omega)^{\tilde{2}}(\tilde{\epsilon}\omega)^\omega\right) < \tilde{\theta}$ für $\alpha = 12$.

Beweis: Logarithmieren von $\binom{\hat{\omega}}{\omega} = \frac{(\tilde{\pi}\omega)^{\tilde{2}}4^\omega}{\omega+\tilde{2}} \sim \frac{4^\omega}{(\pi\omega)^{\tilde{2}}}$ (s. o.) ergibt $\omega! = d(\pi\omega)^{\tilde{2}}(c\omega)^\omega$ mit $c, d \in {}^\mathrm{v}\mathbb{R}_{>0}$ aus

$$+_{n=1}^{\omega}\ {}_\epsilon n + {}_\epsilon 4\ \omega - \tilde{2}_\epsilon(\pi\omega) = +_{n=\grave{\omega}}^{\hat{\omega}}\ {}_\epsilon n = \omega_\epsilon(b\omega),$$

wobei $b \in]1,2[$ ist. Die Indizierung $c_{\grave{\omega}}^{\grave{\omega}}/c_{\omega}^{\omega}$ von c liefert $c = \tilde{\epsilon}$ und $d_{\omega}^{2}/d_{\widehat{\omega}}$ von d zeigt $d = 2^{\tilde{2}}$ auf. TR (s. o.) und GR des Logarithmus ergeben $\alpha = 12$ aus $\acute{\upsilon} = \widehat{\omega}$ und $\tilde{\theta} - \grave{\theta}^{-1} + 1 = (\omega + \tilde{2})_{\epsilon}(\tilde{\omega}\grave{\omega}) = \breve{\upsilon}((1+\tilde{\upsilon})/(1-\tilde{\upsilon}))$.□

Fakultätssatz: Für $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}$ ergibt die Stirlingformel $n! \sim (\hat{\pi}n)^{\tilde{2}}(\tilde{\epsilon}n)^{n}\epsilon^{\widetilde{12n}}$ asymptotisch $n! \in [g(s_{+}), g(s_{-})]$, wenn $\tilde{s}_{\pm} = \tilde{2}(25 \pm 1)n^{\operatorname{sgn}(\acute{n})}$ und $g(s_{\pm}) = \left[\left(\hat{\pi}n + \tilde{3}\grave{s}_{\pm}\pi\right)^{\tilde{2}}(\tilde{\epsilon}n)^{n}\right]$ ist.

Beweis: Für $\tilde{t} := 6n$ gilt $t = {}_{\epsilon}(1 + \grave{s}_{\pm}t) = (\grave{s}_{\pm} - \check{t})t + \mathcal{O}(t^{3})$ mithilfe vollständiger Induktion.□

Satz von Green: Für die NRen $B \subseteq \mathbb{D}^{2}$ mit h-Gebiet $\mathbb{D} \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{R}^{2}$, infinitesimalem $h = |\downarrow x| = |\downarrow y| = |\vec{\gamma}(t) - \gamma(t)| = \mathcal{O}(\tilde{\omega}^{m})$, hinreichend großem $m \in \mathbb{N}^{*}$, $(x,y) \in \mathbb{D}$, $\mathbb{D}^{-} := \{(x,y) \in \mathbb{D} : (x+h, y+h) \in \mathbb{D}\}$, einem im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen GW γ: $[a, b[\to \partial\mathbb{D}$ bei Wahl von $\vec{\gamma}(s) = \gamma(\vec{s})$ gilt mit $s \in [a, b[$, $A \subseteq [a,b]^{2}$ und hinreichend α-stetigen Funktionen u, v: $\mathbb{D} \to {}^{\omega}\mathbb{R}$ mit ggf. nicht stetigen Ableitungen $\downarrow u/\downarrow x$, $\downarrow u/\downarrow y$, $\downarrow v/\downarrow x$ und $\downarrow v/\downarrow y$:

$$\uparrow_{\gamma}(u\downarrow x + v\downarrow y) = \uparrow_{(x,y)\in\mathbb{D}^{-}}\left(\frac{\downarrow v}{\downarrow x} - \frac{\downarrow u}{\downarrow y}\right)\downarrow(x,y).$$

Beweis: Er wird nur für $\mathbb{D} := \{(x,y) : r \le x \le s, f(x) \le y \le g(x)\}$, $r, s \in {}^{(\omega)}\mathbb{R}$, $f, g : \partial\mathbb{D} \to {}^{(\omega)}\mathbb{R}$ geführt, da das jeweils um $\check{\pi}$ gedrehte Äquivalent analog resultiert mit jedem h-Gebiet als Vereinigung solcher Mengen. Da sich die fehlende Beziehung analog ergibt, beschränkt sich die Betrachtung auf

$$\uparrow_{\gamma} u\downarrow x = -\uparrow_{(x,y)\in\mathbb{D}^{-}} \frac{\downarrow u}{\downarrow y}\downarrow(x,y)$$

Unter Vernachlässigung der Teile von γ mit $\downarrow x = 0$ zum KI wie von $s := h(u(r, g(r)) - u(t, g(t)))$ gilt

$$\uparrow_{\gamma} u\downarrow x - s = \uparrow_{t}^{r} u\big(x, g(x)\big)\downarrow x - \uparrow_{t}^{r} u\big(x, f(x)\big)\downarrow x = \uparrow_{t}^{r} \uparrow_{f(x)}^{g(x)} \frac{\downarrow u}{\downarrow y}\downarrow y\downarrow x = -\uparrow_{(x,y)\in\mathbb{D}^{-}} \frac{\downarrow u}{\downarrow y}\downarrow(x,y).\ \square$$

Bemerkungen: Ist der Betrag von $x \in \mathbb{C}$ von anderer Größenordnung als der von $\downarrow x$ bzw. $\widetilde{\downarrow x}$, liefert

$${}^{0}s(x) := \pm_{m=0}^{n} x^{m} = \left(1 - x -^{\grave{n}}\right)/\grave{x}$$

durch Ableitung

$${}^{1}s(x) := \mp_{m=1}^{n} m x^{\acute{m}} = \left(\grave{n}x -^{n} - nx -^{\grave{n}} - 1\right)/\grave{x}^{2}.$$

Obige Formeln wurden z. T. falsch berechnet. Letztere lässt sich für hinreichend kleine x und hinreichend, aber nicht zu große n noch zu $-\grave{x}^{-2}$ vereinfachen und bleibt auch für nicht zu große $x \ge 1$ gültig. Durch sukzessive Multiplikation von ${}^{m}s(x)$ mit x für $m \in {}^{\omega}\mathbb{N}^{*}$ und anschließende Differentiation ergeben sich weitere Formeln für ${}^{\grave{m}}s(x)$ als Beispiele auch divergenter Reihen. Wird hingegen ${}^{0}s(-x)$ von 0 bis 1 integriert und $n := \omega$ gesetzt, so ergibt sich ein Integralausdruck für ${}_{\epsilon}\omega + \gamma$ mit der Eulerschen Konstante γ.

Die Regel von de l'Hospital löst den Fall $x = -1$. Über die binomische Reihe ergibt die Substitution $y := -\acute{x}$ eine Reihe mit unendlichen Koeffizienten (die Reihendarstellung von ${}_{\epsilon}\omega$ sogar für γ). Ein unzulässig zu 1 vereinfachter Zähler von ${}^{0}s(x)$ kann zu falschen Ergebnissen führen, insbesondere wenn $|x| \ge 1$ gilt. So ist ${}^{0}s(-\epsilon^{\pi i})$ bspw. 0 für ungerades n und 1 für gerades n, aber nicht $\tilde{2}$.

Satz: Genau dann, wenn F: $A \to {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ mit der Aufspaltung in Real- und Imaginärteil $F(z) := U(z) + \underline{V}(z) := f(x,y) := u(x,y) + \underline{v}(x,y)$, infinitesimalem $h = |\downarrow x| = |\downarrow y|$, h-homogenem $A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{C}$, der NR $B \subseteq A^{2}$, für alle $z = x + \underline{y} \in A$ holomorph ist, gelten die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:*

$$\frac{\downarrow u}{\downarrow x} = \frac{\downarrow v}{\downarrow y}, \frac{\downarrow v}{\downarrow x} = -\frac{\downarrow u}{\downarrow y}.$$

Beweis: Aus $\frac{\downarrow u}{\downarrow x} + \frac{\downarrow \underline{v}}{\downarrow x} = \frac{\downarrow v}{\downarrow y} - \frac{\downarrow \underline{u}}{\downarrow y} = \frac{\downarrow F}{\downarrow z} = \downarrow U(z) + \downarrow \underline{V}(z)$ folgt direkt die Behauptung.□

Bemerkung: Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Holomorphie von F ergibt sich

$${}^{1}F(\bar{z}) = \frac{\downarrow f}{\downarrow x} = \frac{\downarrow \underline{f}}{\downarrow y} = \tilde{2}\left(\frac{\downarrow f}{\downarrow x} + \frac{\downarrow \underline{f}}{\downarrow y}\right) = \frac{\downarrow F}{\downarrow \bar{z}} = 0.$$

Integrallemma von Goursat: Für das im Dreieck $\Delta \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ holomorphe f ohne SF gilt (vgl. [473], S. 149 ff.)

$$I \coloneqq \uparrow_{\partial\Delta} f(\zeta)\downarrow\zeta = 0.$$

Widerlegung bestimmter herkömmlicher Beweise durch Abschätzung mit einer vollständigen Triangulierung: Der Umlaufsinn von $\partial\Delta$ ist anscheinend unerheblich. Wird Δ vollständig trianguliert, dann muss für jedes minimale Teildreieck $\Delta_s \subseteq \Delta$ mit den Ecken κ, λ und μ von Δ_s o. B. d. A. entweder

$$I_s \coloneqq \uparrow_{\partial\Delta_s} f(\zeta)\downarrow\zeta = f(\kappa)(\lambda-\kappa) + f(\lambda)(\mu-\lambda) + f(\kappa)(\kappa-\mu) = \big(f(\kappa)-f(\lambda)\big)(\lambda-\mu) = 0$$

oder

$$\begin{aligned}\uparrow_{\partial\Delta_s} f(\zeta)\downarrow\zeta &= f(\kappa)(\lambda-\kappa) + f(\lambda)(\mu-\lambda) + f(\mu)(\kappa-\mu) = \big(f(\kappa)-f(\lambda)\big)\lambda + \big(f(\lambda)-f(\mu)\big)\mu + \big(f(\mu)-f(\kappa)\big)\kappa \\ &= {}^1f(\lambda)\big((\kappa-\lambda)\lambda + (\mu-\lambda)\mu + (\mu-\lambda)\kappa + (\kappa-\lambda)\kappa\big) = {}^1f(\lambda)\big((\mu-\lambda)(\kappa-\mu) - (\kappa-\lambda)^2\big) = 0\end{aligned}$$

gelten. Die Holomorphie bzw. zyklische Vertauschung erlaubt dies nur für $f(\kappa) = f(\lambda) = f(\mu)$.

Werden alle angrenzenden Teildreiecke in Δ einbezogen, muss f also im Widerspruch zur Voraussetzung konstant sein. Denn da der Term in der großen Klammer translationsinvariant ist, ließe sich sonst o. B. d. A. $\mu := 0$ setzen, und dieser Term wäre nur dann 0, wenn $\kappa = \check{\lambda}\big(1 \pm 3 -^{\tilde{2}}\big)$ mit $|\kappa| = |\lambda| = |\kappa - \lambda|$ gilt. Die Homogenität jeder horizontalen und vertikalen Gerade in ${}^{(\omega)}\mathbb{C}$ verbietet dies jedoch:

Das zugehörige Teildreieck wäre dann gleichseitig und nicht gleichschenklig und rechtwinklig. Also ist $|I_s|$ in beiden Fällen mindestens $|{}^1f(\lambda)\ \mathcal{O}(\iota^2)|$ o. B. d. A. für die Eckenwahl 0, ι und $\underline{\iota}$. Ist L der Umfang eines Dreiecks, so gilt einerseits $|I| \leq 4^m\ |I_s|$ mit unendlich natürlichem m und andererseits $2^m = L(\partial\Delta)/|\mathcal{O}(\iota^2)|$ wegen $L(\partial\Delta) = 2^m\ L(\partial\Delta_s)$ und $L(\partial\Delta_s) = |\mathcal{O}(\iota^2)|$. Es gilt $|I| \leq |{}^1f(\lambda)\ L(\partial\Delta)^2/\mathcal{O}(\iota^2)|$ und die gewünschte Abschätzung $|I| \leq |\mathcal{O}(\downarrow\zeta)|$ misslingt für $|{}^1f(\lambda)\ L(\partial\Delta)^2|$ etwa größer als $|\mathcal{O}(\iota^2)|$.□

Cauchyscher Integralsatz: Für die NRen $B \subseteq \mathbb{D}^2$ und $A \subseteq [a, b]$ mit h-Gebiet $\mathbb{D} \subseteq {}^{\omega}\mathbb{C}$, infinitesimalem h sowie $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ und GW γ: $[a, b[\to \partial\mathbb{D}$ bei Wahl von $\vec{\gamma}(s) = \gamma(\vec{s})$ mit $s \in [a, b[$ gilt $\uparrow_\gamma f(z)\downarrow z = 0$.

Beweis: Aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und des Satzes von Green gilt mit $x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$, $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$ und $\mathbb{D}^- := \{z \in \mathbb{D} : z + h + \underline{h} \in \mathbb{D}\}$

$$\uparrow_\gamma f(z)\downarrow z = \uparrow_\gamma\big(u + \underline{v}\big)\big(\downarrow x + \downarrow\underline{y}\big) = \uparrow_{z\in\mathbb{D}^-}\left(\left(\frac{\downarrow\underline{u}}{\downarrow x} - \frac{\downarrow\underline{v}}{\downarrow y}\right) - \left(\frac{\downarrow v}{\downarrow x} + \frac{\downarrow u}{\downarrow y}\right)\right)\downarrow(x, y) = 0.\ \square$$

Bemerkung: Mit $\tilde{\omega} := 0$ lässt sich der Hauptsatz der Cauchyschen Funktionentheorie nach Dixon (vgl. [473], S. 228 f.) beweisen, da der Limes dort 0 sein soll bzw. $\tilde{r}$ gegen 0 für $r \in {}^{\omega}\mathbb{R}_{>0}$ gegen ω strebt. Der (verallgemeinerte) Satz von Liouville und der kleine Satz von Picard werden in ${}^{\omega}\dot{\mathbb{C}} \subset {}^{\omega}\mathbb{C}$ durch die (ganzen) Funktionen $f(z) = +_{k=1}^{\omega} z^k\tilde{\omega}^{k+1}$ und $g(z) = \tilde{\omega}z$ wegen $|f(z)| \leq 1$ und $|g(z)| \leq 1$ widerlegt, der große Satz von Picard durch $f(\tilde{z})$ für $z \in {}^{\omega}\dot{\mathbb{C}}^*$.

Gegenläufigkeitssatz: Durchläuft der Weg γ: $G = [a, b[\cap C \to V$ mit $C \subseteq \mathbb{R}$ die Kanten aller n-Würfel mit Seitenlänge ι im n-Volumen $V \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ genau einmal, wobei in allen deren Seitenflächen die paarweise gegenüberliegenden Seiten in gegenläufiger Richtung, aber einheitlich traversiert werden, so gilt für $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $B \subseteq V^2$, $f = (f_1, ..., f_n)$: $V \to {}^{(\omega)}\mathbb{R}^n$, $\gamma(s) = x$, $\gamma(\vec{s}) = \vec{x}$ und $V_r := \{\vec{x} \in V : x \in V, \vec{x} \neq \tilde{x}\}$

$$\uparrow_{s\in G} f\big(\gamma(s)\big)^1\gamma(s)\downarrow s = \uparrow_{\substack{(x,\vec{x}) \\ \in V\times V_r}} f(x)\downarrow Bx = \uparrow_{\substack{s\in G, \\ \gamma|\partial^{\acute{n}}V}} f\big(\gamma(s)\big)^1\gamma(s)\downarrow s.$$

Beweis: Bei Betrachten zweier beliebiger Quadrate mit gemeinsamer Kante der Länge ι, die in einer Ebene liegen, werden nur die Kanten von $V\times V_r$ nicht in beiden Richtungen bei gleichem Funktionswert durchlaufen. Sie liegen alle und damit der zu durchlaufende Weg genau in $\partial^{\acute{n}}V$.□

Transformationssatz: Existiert die Jacobi-Matrix $D\varphi(x)$, lehrt die lineare Algebra für $f : \varphi(A) \to {}^{(\omega)}\mathbb{R}^n$ und $A \subseteq {}^{\omega}\mathbb{R}^n$ (vgl. [764], S. 519):

$$\uparrow_{\varphi(A)} f(y)\downarrow y = \uparrow_A f(\varphi(x))|\operatorname{eig}(D\varphi(x))|\downarrow x.\ \square$$

Definition: Für einen GW γ: $[a, b[\to {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ und $z \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ heißt $\tilde{\tilde{\underline{n}}} \uparrow_\gamma \widetilde{\zeta - z} \downarrow \zeta$ *Umlaufzahl* bzw. *Index* $\mathrm{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. Die Koeffizienten $a_{j,-1}$ der Funktion f: $A \to {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ mit $A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{C}$, $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}$, a_{jk}, $c_j \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ und $f(z) = +_{j=0}^{n} +_{k=-\omega}^{\omega} a_{jk}(z - c_j)^k$ sowie paarweise verschiedenen c_j heißen *Residuen* $\mathrm{res}_{c_j} f$.△

Residuensatz: Aus γ und f wie oben ergibt sich $\tilde{\tilde{\underline{n}}} \uparrow_\gamma f(\zeta) \downarrow \zeta = +_{j=0}^{n} \mathrm{ind}_\gamma(c_j) \mathrm{res}_{c_j} f$.

Beweis: Für alle $k \in {}^{\omega}\mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ gilt $+_{j=0}^{n} \left| \uparrow_\gamma a_{jk}(\zeta - c_j)^k \downarrow \zeta \right| = 0$ und $\tilde{\tilde{\underline{n}}} \uparrow_\gamma a_{j,-1} \widetilde{\zeta - c_j} \downarrow \zeta = \mathrm{ind}_\gamma(c_j) \mathrm{res}_{c_j} f$.□

Definition: Ein Punkt $z_0 \in M \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{C}^n$ bzw. zu einer Folge (a_k) mit $k \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}$ heißt *(eigentlicher) α-Häufungspunkt* von M bzw. (a_k), wenn in der Kugel ${}^{\alpha}\dot{\mathbb{C}}^n(z_0) \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{C}^n$ um z_0 mit infinitesimalem α unendlich viele Punkte aus M bzw. unendlich viele paarweise verschiedene $a_k \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}^n$ liegen. Für $\alpha = \tilde{\omega}$ entfällt α.△

Bemerkung: Die paarweise verschiedenen Nullstellen $c_k \in {}^{\tilde{\omega}}\dot{\mathbb{C}} \subset \mathbb{D}$ für $z \in {}^{\omega}\mathbb{C}$ in $p(z) = \times_{k=0}^{\omega}(z - c_k)$ seien so gewählt, dass $|f(c_k)| < \tilde{\omega}$ für eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ in einem Gebiet $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ gilt. $\mathbb{D}$ enthalte ${}^{\tilde{\omega}}\dot{\mathbb{C}}$ komplett, was eine Koordinatentransformation stets bewirkt, solange $\mathbb{D}$ "groß" genug ist. Die Koinzidenzmenge $\{\zeta \in \mathbb{D} : f(\zeta) = g(\zeta)\}$ von $g(z) := f(z) + p(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ enthält einen Häufungspunkt in 0. Da $p(z)$ jeden komplexen Wert annehmen kann, ist die Abweichung von f und g nicht vernachlässigbar.

Wegen $f \neq g$ widerspricht dies dem Identitätssatz wie die lokale Tatsache, dass in $z_0 \in \mathbb{D}$ alle Ableitungen ${}^{n}u(z_0) = {}^{n}v(z_0)$ zweier Funktionen u und v für alle n zwar übereinstimmen können: weiter entfernt können sich aber u und v deutlich unterscheiden, ohne ihre Holomorphie zu verlieren, da die Entwicklung mancher holomorphen Funktion in eine TR Näherungspotenzen enthält. Die Funktion $b(z) := \tilde{v}z$ mit $z \in {}^{\nu}\dot{\mathbb{C}} \subset {}^{\nu}\mathbb{C}$ bildet das einfach zusammenhängende ${}^{\nu}\dot{\mathbb{C}}$ holomorph auf ${}^{1}\dot{\mathbb{C}}$ ab.

Eine fehlende Injektivität bzw. Surjektivität erfordert eine Korrektur des Riemannschen Abbildungssatzes. Beispiele für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ sind alle in ${}^{\tilde{\omega}}\dot{\mathbb{C}}$ beschränkten Funktionen mit $f(0) = 0$. Wird die obere Grenze auf $|\mathbb{N}^*|$ erweitert, ergeben sich ganze Funktionen mit unendlich vielen Nullstellen. Die Nullstellenmenge braucht nicht diskret zu sein. Damit kann die Menge aller $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ Nullteiler enthalten. Die Funktionen widerlegen erneut den kleinen Satz von Picard, da sie mindestens $\acute{n}$ Werte in ${}^{\omega}\mathbb{C}$ auslassen.

Satz (binomische Reihe): Aus $\alpha \in {}^{\nu}\mathbb{C}$, $\binom{\alpha}{n} := \tilde{n}!\, \alpha\acute{\alpha} \ldots (\grave{\alpha} - n)$ und $\left|\binom{\alpha}{\grave{m}} / \binom{\alpha}{m}\right| < 1$ für alle $m \geq \nu$ und $\binom{\alpha}{0} := 1$ ergibt sich mit $z \in \mathbb{D}^{\ll}$ bzw. $z \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ für $\alpha \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}$ die TR um 0 die Gleichung $\grave{z}^{\alpha} = +_{n=0}^{\omega} \binom{\alpha}{n} z^n$.□

Multinomialsatz: Für $\zeta \in {}^{\omega}\mathbb{C}$, $z \in {}^{\omega}\mathbb{C}^k$, $k \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 2}$, m, $n_j \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$, $|n| := +_{j=1}^{k} n_j$, $z^n := \times_{j=1}^{k} z_j^{n_j}$ und $\binom{m}{n} := n_1\widetilde{!\ldots n_k}!\, m!$ gilt

$$(1\, 1_k^T\, z)^m = +_{|n|=m} \binom{m}{n} z^n .$$

Beweis: Die Fälle $k \in \{1, 2\}$ sind klar. Induktionsschritt von k nach $\grave{k}$ mit $\binom{m}{n} = \binom{m}{n_1, \ldots, n_k, p}\binom{p}{n_k, n_{\grave{k}}}$ und $p = n_k + n_{\grave{k}}$:

$$\left(1\, 1_k^T\, z\right)^m\Big|_{\zeta_k = z_k + z_{\grave{k}}} = +_{|n|=m} \binom{m}{n} z^n\Big|_{\eta_k! = n_k! n_{\grave{k}}!} = +_{|n|=m} \binom{m}{n} z^n .\square$$

bzw. von m nach $\grave{m}$

$$\begin{aligned}(1\, 1_k^T\, z)^{\grave{m}} &= \grave{m} \uparrow_0^{z_j} (1\, 1_k^T\, z)^m|_{z_j = \zeta} \downarrow \zeta + (1\, 1_k^T\, z)^{\grave{m}}\big|_{z_j = 0} \\ &= \grave{m} \uparrow_0^{z_j} +_{|n|=m} \binom{m}{n} z^n|_{z_j = \zeta} \downarrow \zeta + (1\, 1_k^T\, z)^{\grave{m}}\big|_{z_j = 0} = +_{|\grave{n}|=\grave{m}} \binom{\grave{m}}{\grave{n}} z^{\grave{n}}\end{aligned}$$

Allgemeine Leibnizsche Produktregel: Mit $\downarrow^n := \downarrow_1^{n_1} \ldots \downarrow_k^{n_k}$ und $\downarrow_j^{n_j} := \downarrow^{n_j} / \downarrow z_j^{n_j}$ folgt für j, k, m, $n \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}$ und differenzierbares $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_k \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ aus dem Multinomialsatz $\downarrow^m f = +_{|n|=m} \binom{m}{n} \downarrow^n f$.□

Satz von Taylor für mehrere Variablen: Mit $n! := \times_{j=1}^{k} n_j!$, $a, z \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}^k$ und $(z - a)^n := \times_{j=1}^{k} (z - a)^{n_j}$, folgt aus dem Multinomialsatz ebenfalls analog zum Beweis der einfachen TR für $n \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}$

$$f(z) = T_\omega(z) := +_{|n|=0}^{\omega}\left(\tilde{n}! \downarrow^n f(a)(z - a)^n\right).\square$$

Folgerung: Analog zur einfachen TR ist das Restglied mit $\zeta \in {}^{\alpha}\dot{\mathbb{C}}(z)$ und $k \in \mathbb{N}^*_{\leq \grave{n}}$

$$R_n(z) = (z-\zeta)^k/(1-k/\grave{n}) \mathbin{\underline{+}}_{|m|=\grave{n}} \widetilde{m!} \downarrow^m f(\zeta)(z-a)^{m-k}\,. \square$$

Kettenregel für mehrere Variablen: Für $z \in A \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^k, g\colon A \to B \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^m, f\colon B \to C \subseteq {}^{(\omega)}\mathbb{K}^n$ gilt mit $k, m, n \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}^*$:

$${}^1f\big(g(z)\big) = {}^1f\big(g(z)\big)\,{}^1g(z)$$

Beweis: Aus dem Satz von Taylor für mehrere Variablen folgt für beschränkte $\|r(z)\|$ und $\|s(g(z))\|$

$$g(\vec{z}) = g(z) + {}^1g(z) \downarrow z + r(z)\|\downarrow z\|^2 \text{ und } f\big(\vec{g}(z)\big) = f\big(g(z)\big) + {}^1f\big(g(z)\big) \downarrow g(z) + s\big(g(z)\big)\|\downarrow g(z)\|^2. \square$$

Newtonverfahren: Wird oben $f(\vec{z}) = f(z) + {}^1f(z) \downarrow z = 0$ gefordert, so gilt $z_{\grave{n}} := z_n - {}^1f(z_n)^{-1}f(z_n)$, falls ${}^1f(z_n)^{-1}$ invertierbar ist, mit quadratischer Konvergenz in der Nähe einer Nullstelle.$\square$

Endlichkeitskriterium für Reihen: Seien $m, n, q, r \in \mathbb{N}$. Genau dann ist $S_r := \left|\mathbin{\underline{+}}_{q=0}^{r} s_q\right|$ mit $s_q \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ endlich, wenn $0 \leq S_r := \left|\mathbin{\underline{+}}_{m=0}^{n} a_m\right| \leq a_0$ für eine Folge (a_m) mit $a_{\grave{m}} < a_m \in {}^{\nu}\mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt, sofern sich Summanden beliebig nach Größe und Vorzeichen sortieren, zusammenfassen bzw. in Summen aufspalten lassen.$\square$

Beispiel: Mit $f(x) := \mathbin{\underline{+}}_{n=1}^{\omega} \tilde{n}^2\,{}_{\epsilon}(1+n^2x^2)$ gilt ${}^1f(0) = \frac{f(\iota)-f(0)}{\iota-0} = \mathbin{\underline{+}}_{n=1}^{\omega} \frac{x^2}{1+n^2x^2}\Big|_0 = \mathbin{\underline{+}}_{n=1}^{\omega} \tilde{\iota}\tilde{n}^2\,{}_{\epsilon}(1+n^2\iota^2) = \iota\omega = 0$, wobei die Reihenentwicklung ${}_{\epsilon}\grave{x} = \mathbin{\underline{+}}_{n=1}^{\omega} \tilde{n}x^n$ mit $x \in\,]-1,1[$ verwendet und gliedweise differenziert wurde.

Reihenproduktsatz: Mit $a_m, b_n \in {}^{(\omega)}\mathbb{K}$ ersetzt folgende Gleichung das Cauchy-Produkt (s. [472], S. 103):

$$\mathbin{\underline{+}}_{m=1}^{\omega} a_m \mathbin{\underline{+}}_{k=1}^{\omega} b_n = \mathbin{\underline{+}}_{m=1}^{\omega}\Big(\mathbin{\underline{+}}_{n=1}^{m}(a_n b_{m-\grave{n}} + a_{\omega-\grave{n}} b_{\omega-m+n}) - a_m b_{\omega-\grave{m}}\Big)\,. \square$$

Beispiel: Das folgende Reihenprodukt hat den endlichen Wert (vgl. [763], S. 61 f.):

$$\left(\mathbin{\underline{+}}_{m=1}^{\omega} \tilde{m}^{\tilde{2}}\right)^2 = \mathbin{\underline{+}}_{m=1}^{\omega}\left(\left(\frac{\tilde{m}}{\omega-\grave{m}}\right)^{\tilde{2}} - \left(\underline{1}^{\hat{m}} \mathbin{\underline{+}}_{n=1}^{m}\left(\left(\frac{\tilde{n}}{m-\grave{n}}\right)^{\tilde{2}} + \left(\frac{\widetilde{\omega-n}}{\omega-m+n}\right)^{\tilde{2}}\right)\right)\right) = 0{,}36590\ldots \ll \frac{\zeta(\tilde{2})^2}{3+8^{\tilde{2}}}.$$

Beispiel: Mit der Signumfunktion sgn gilt für folgendes Reihenprodukt (vgl. [763], S. 62):

$$\mathbin{\underline{+}}_{m=0}^{\omega}\left(2^{m^{\operatorname{sgn}(m)}} \mathbin{\underline{+}}_{n=0}^{m} \operatorname{sgn}(n-\gamma)\right) = \acute{\omega}2^{\grave{\omega}} \gg -2.$$

Satz von Stokes (vgl. [764], S. 625 f.): Steht $^{-}$ für hinreichend α-stetige Funktionen $f_m\colon C \to {}^{\omega}\underline{\mathbb{R}}$ über einem wegzulassenden Term bei einer alternierenden Differentialform $\upsilon := \mathbin{\underline{+}}_{m=1}^{n} f_m \downarrow x_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\downarrow x_m} \wedge \ldots \wedge \downarrow x_n$ vom Grad $\acute{n}$ auf einem achsenparallelen Quader $C = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq {}^{\omega}\mathbb{R}^n$ mit $\partial C := \overline{\mathbin{\underline{+}}}_{m=1}^{n}\big(F_{a,m} - F_{b,m}\big)$ und den Seitenflächen $F_{a,m} = [a_1, b_1] \times \ldots \times \{a_m\} \times \ldots \times [a_n, b_n]$ sowie $F_{b,m} = [a_1, b_1] \times \ldots \times \{b_m\} \times \ldots \times [a_n, b_n]$, so gilt $\uparrow_C \downarrow \upsilon = \uparrow_{\partial C} \upsilon$.

Beweis: Der zweite Hauptsatz und der Satz von Fubini (s. o.) ergeben

$$\uparrow_C \downarrow \upsilon = \overline{\mathbin{\underline{+}}}_{n=1}^{m} \uparrow_{a_n}^{b_n} \ldots \overline{\uparrow_{a_m}^{b_m}} \ldots \uparrow_{a_1}^{b_1}\big(f_m(x_1, \ldots, a_m, \ldots, x_n) - f_m(x_1, \ldots, b_m, \ldots, x_n)\big)\downarrow x_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\downarrow x_m} \wedge \ldots \wedge \downarrow x_n$$

und

$$\frac{\downarrow f_m}{\downarrow x_m}\downarrow x_m \wedge \downarrow x_1 \wedge \ldots \wedge \downarrow x_{\acute{m}} \wedge \downarrow x_{\grave{m}} \wedge \ldots \wedge \downarrow x_n = -\underline{1}^{\hat{m}}\frac{\downarrow f_m}{\downarrow x_m}\downarrow x_1 \wedge \ldots \wedge \downarrow x_n. \square$$

Bemerkung: Der Satz von Stokes gilt auch für aus Quadern bestehende n-dimensionale Mannigfaltigkeiten.

Ratschläge

Was kann ich Ihnen aus meiner jahrzehntelangen mathematischen Erfahrung heraus raten?

Echte Fortschritte in der Mathematik gibt es nur mit ungewöhnlichen Ideen, die aus einer intensiven Gedankenarbeit resultieren. Mit Glück lösen sich die wenigsten Probleme. Wir benötigen einen mathematischen Fundus, aus dem wir die mathematischen Tools für unsere Probleme verwenden können. Erfolg stellt sich erst mit einer gehörigen Portion Hartnäckigkeit ein, mit der wir ein Problem auch notfalls Jahrzehnte lang verfolgen, bevor wir es lösen können.

Wenn wir tief genug denken, kann dies so weit gehen, dass wir ganze Theorien überflüssig machen. Daher ist es erforderlich auch die sogenannten Selbstverständlichkeiten infrage zu stellen und bessere Lösungen zu entwickeln, wenn wir mit dem Stand der Forschung nicht zufrieden sind. Wir müssen eine hohe Sensibilität für das Machbare entwickeln und dürfen nicht vorschnell mit dem Erreichten zufrieden sein: Wir müssen uns selbst kritisieren (lassen).

Es sind nicht nur die großen und komplizierten Ideen, die ein Problem bestmöglich lösen, aber lange Beweise erfordern. Es sind oftmals die kleinen, einfachen Schritte, die den Erfolg bringen, da aufwändige Transformationen eine ungünstige Komplexität besitzen. Wir sollten außerdem die Beobachtungsgabe schulen und uns von der vorhandenen Literatur lösen, deren Studium vermeidet das Rad neu erfinden zu müssen oder wichtige Impulse zu verpassen.

Können wir ein mathematisches Problem iterativ nicht lösen, sollten wir automatisierte rechnergestützte (Beweis-)Methoden nutzen oder uns mit einer guten Näherung zufrieden geben, auch wenn dabei die Schönheit und Prägnanz der exakten und geschlossenen Darstellung verloren geht und der Aufwand für die Umsetzung beträchtlich ist, sofern die Lösung des Problems wichtig genug ist bzw. die benötigten Ressourcen verfügbar sind.

Oftmals sind die Angabe von Fehlergliedern oder numerische Lösungswege (z. B. unter Verwendung von Intervallarithmetik) ausreichend, da eine hohe Präzision nicht erforderlich ist. Zwar sind bestimmte Aussagen nur in ihrer exakten Form von Wert, aber es ist wichtiger die Probleme nach ihrer praktischen Verwendbarkeit und Verwendung zu bewerten, dann eine Prioritätenrangfolge zu erstellen und sie zum Schluss befriedigend zu lösen.

Es wird immer wieder Zahlen geben, die nicht mit kurzen Summen oder Produkten von wenigen (algebraischen oder transzendenten) Zahlen darstellbar sind, selbst wenn wir einige Zahlen (zusätzlich) auszeichnen und unter einem Symbol verwenden müssen. Es hat seinen guten Grund, dass wir nicht über die Möglichkeit der Götter verfügen ganze Unendlichkeitsstufen auf einmal zu überblicken und aus ihnen prägnante Ergebnisse herauszufiltern.

Topologie

Im Folgenden wird die Mengenlehre mit der euklidischen Norm $||\cdot||$ vorausgesetzt.

Definition: Gehört zu $\mathbb{Y} \subseteq \mathcal{P}(X)$ neben $\emptyset$ und $X \subseteq R$ jeder Durchschnitt und jede Vereinigung von Mengen aus $\mathbb{Y}$, heißt ein Mengensystem $\mathbb{Y}$ *Topologie* auf X. Das Paar $(X, \mathbb{Y})$ heißt *topologischer Raum*. Gilt $\mathbb{Y} = \mathcal{P}(X)$, heißt die Topologie *diskret*. Lässt sich jede Menge aus $\mathbb{Y}$ als Vereinigung beliebig vieler Mengen aus $B \subseteq \mathbb{Y}$ schreiben, heißt die Menge B eine *Basis* von $\mathbb{Y}$. Jede irreflexive Relation $N \subseteq A^2$ etabliert eine *Nachbarschaftsrelation (NR)* in $A \subseteq X$ mit der Grundmenge X.△

Definition: Gilt $(a, b) \in N$, heißt a *Nachbar* von oder *benachbart* zu b. Speziell heißt ein Element $x \in A \subseteq X$ Nachbar von einem Element $y \in A$ mit $x \neq y$, wenn für alle $z \in X$ und eine Abbildung $d\colon X^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: (1) $d(x, y) \leq \max\{\min\{d(x, z), d(z, x)\}, \min\{d(y, z), d(z, y)\}\}$ und (2) $d(z, z) = 0$. Hierbei heißt d *Nachbarschaftsmetrik*. Die Menge aller *Punkte* $P = R \cup V$ sei eine *Zerlegung* in die *realen* Punkte R und die *virtuellen* Punkte V mit $R, V \neq \emptyset = R \cap V$. Ist R oder V klar, wird es jeweils weggelassen.△

Definition: Jede Menge $A \subseteq R$ etabliert ihr *Komplement* $A' := R \setminus A$ in R. A' heißt auch das *Äußere* von A. Alle Punkte von V (A), die einen Nachbarn aus R $(A' \cup V)$ haben, bilden den *(inneren) Rand* ∂V (∂A) von V (A). Hierbei hat $'$ Vorrang vor ∂. Bei sukzessiver weiterer Anwendung von ∂ wird das Argument jeweils als ohne Komplement angesehen. Das *Innere* von A sei $A^\circ := A \setminus \partial A$. Wird $\partial A \subseteq A$ vergrößert durch die Bedingung $\min\{d(x, y) : x \in A^\circ, y \in A'\} = \tilde{\nu}$, sei $A^{\ll} := A \setminus \partial A$.△

Definition: Eine Menge $S \subseteq R$ (V) heißt *zusammenhängend,* wenn für jede Zerlegung von S in $Y \cup Z$ mit $Y, Z \neq \emptyset = Y \cap Z$ gilt: $\partial Y' \cap \partial Z \neq \emptyset \neq \partial Z' \cap \partial Y$. $S \subseteq R$ heißt darüber hinaus *einfach zusammenhängend*, wenn gilt: Sowohl $\partial Y' \cap \partial Z \cup \partial Z' \cap \partial Y$ für jede Zerlegung in zusammenhängende Y und Z als auch $S' \cup (\partial)V$ mit S' als Komplement von S in R ist mit zusammenhängendem $(\partial)V$ zusammenhängend. P und R seien einfach zusammenhängend. Jedes $U \subseteq R$ heißt *Umgebung* von $x \in R$, wenn $x \in U^\circ$ gilt.△

Definition: Gilt $\emptyset \neq \mathbb{D} \subseteq (X, \mathbb{Y})$, heißt ein zusammenhängendes $\mathbb{D}$ *Gebiet*. Mit $m \in \mathbb{N}^*$ heißt die Menge $h\text{-}S \subseteq \mathbb{R}^m$ genau dann *n-dimensional* mit $m \geq n \in \mathbb{N}^*$, wenn sie mindestens einen n-Würfel mit Kantenlänge $h \in \mathbb{R}_{>0}$ und maximalem n enthält. Sei ${}^1\dot{\mathrm{R}}^n$ die *Einheitskugel* mit dem Spezialfall *Einheitskreisscheibe* ${}^1\dot{\mathrm{R}}^2$. *Mittelpunkte* a von n-Kugeln und n-Würfeln werden evtl. dahinter in Klammern als (a) notiert. Bestehen die Elemente einer Menge aus n maximalen Würfeln mit Kantenlänge ι, hat sie Dimension ${}_{\tilde{\iota}}\mathrm{n}$.△

Beispiele: Für $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ ist genau die jeweilige diskrete Topologie die Basis. Der Rand jeder n-Kugel mit $n \geq 2$ ist nur zusammenhängend, sie selbst hängt einfach zusammen. Für $n = 1$ sind beide unzusammenhängend. Mit $n \geq 2$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist der n-*Torus* ${}^{\mathrm{r}}\mathrm{T}^{\mathrm{n}} := \left(\partial^{\mathrm{r}}\dot{\mathrm{R}}\right)^{\mathrm{n}}$ nur zusammenhängend.

Satz: Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ lässt sich keine endliche Zerlegung einer n-Kugel zu einem n-Würfel zusammensetzen, da endlich viele konvexe Begrenzungen nicht konkave Pendants gleicher Größenordnung haben können.□

Satz: Ein Durchlaufen von bis zu neun Feldern eines Tic-Tac-Toe-Spielfeldes macht die einelementige Menge zur einzigen zusammenhängenden mit Fixpunkteigenschaft (ungültiger Satz vom Igel).□

Definition: Eine Funktion zwischen zwei topologischen Räumen heißt *stetig*, wenn für jeden abgebildeten Punkt gilt: für jede Umgebung des Bildpunktes dieses Punktes gibt es eine Umgebung des Punktes, deren Bild komplett in der Umgebung des Bildpunktes liegt.△

Bemerkung: Die suggestiven Begriffe Kompaktheit und (die eventuell irreführende) Abzählbarkeit werden nicht verwendet, da sie bei unendlichen Mengen wie $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{N}$ nicht vorliegen. Bei allen kontrahierenden Deformationen sind Punkte so aus der Zielmenge zu entfernen, wie es die Kontraktion vorgibt. Erst dann gilt die (verallgemeinerte) Poincaré-Vermutung.

Bemerkung: Die benachbarten Randpunkte des herkömmlich abgeschlossenen $[0, 1]$ und des herkömmlich offenen $]0, 1[$ besitzen insbesondere nicht die Hausdorffeigenschaft (s. [782], S. 83). Damit kann nicht jeder metrische Raum ein Hausdorff-Raum oder normal sein und auch die (prä-)regulären Räume sind eingeschränkt. Die Räume $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^n$ mit $n \in {}^{\nu}\mathbb{N}^*$ besitzen also nur die Fréchet-Topologie (vgl. [915], S. 62). In der teilweise unpräzisen herkömmlichen Mathematik ergibt sich dagegen ein anderes Bild.

Wissenschaftliches Rechnen

Das Folgende setzt Mengenlehre und Nichtstandardanalysis voraus. Sei $\varepsilon \in [\tilde{\nu}, 1 - \tilde{\nu}]$.

Definition: Seien $f_n^*(z) = f(\eta n z)$ die Schwestern zur TR $f(z)$ um 0 auf dem Gebiet $\mathbb{D} \subseteq {}^{\omega}\mathbb{C}$ mit $m, n \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ und $\eta_n^m := \underline{1}^{2^{\lceil m/n \rceil}}$ sowie $\delta_n^* f = \check{f} - \check{f}_n^*$ die *halben Schwesterabstände* von f. Sei $\mu_n^m := m!n!/(m+n)!$ und $\widetilde{(-n)}! := 0$. Für $j, k \in {}^{\omega}\mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}_{\pi}^{j+2}$ und die *Fourierkoeffizienten* $c_k := \widetilde{\hat{\pi}} \uparrow_{-\pi}^{\pi} f(t)\epsilon^{\underline{kt}} \downarrow t$ (vgl. [739], S. 358 ff.) heißt die Reihe $\mathop{+}_{k=-\omega}^{\omega} c_k \epsilon^{\underline{kt}}$ *Fourierreihe*. Auf Ebene der TRn bilden μ und η den μ-η-*Kalkül*.△

Bemerkung: Letzterer erlaubt Integrale und Ableitungen einfach und endlich geschlossen darzustellen (vgl. [473], S. 165 f.). Ein Umrechnen auf andere Periodenlängen als $\hat{\pi}$ ist leicht möglich (s. [739], S. 364).

Beispiel: Aus Re $c \in [\tilde{\nu}, 1 + \tilde{\nu}[$, $c \in {}^{\omega}\mathbb{C}$ und $\varepsilon := \tilde{2}^j$, $j \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ folgt $\zeta(n + c) = 2^{jn}\,\tilde{n} \mathop{+}_{k=1}^{n} \delta_n^* v_c(\tilde{2}^j u^k)$ für $z \in {}^{1-\tilde{\nu}}\dot{\mathbb{C}} \subset \mathbb{D}$ (vgl. [474], S. 42) und $v_c(z) := \mathop{+}_{m=1}^{\omega} \zeta(m + c) z^m = z \mathop{+}_{m=1}^{\omega} \widetilde{m^c z - m}$. □

Beispiel: Eine Richardson-Extrapolation bestimmt die Digammafunktion ψ und

$$\zeta(\grave{n}) = \varepsilon^{\widetilde{n}}\hat{n} \mathop{+}_{k=1}^{n} \left(\psi(\varepsilon u^k \underline{1}^{2\tilde{n}}) - \psi(\varepsilon u^k)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\hat{n}})$$

für $n = 2$ und $\varepsilon = \tilde{2}^{13}$ als $\zeta(3) = 2^{24} \mathop{+}_{k=1}^{2} \left(\psi(\underline{\varepsilon} u^k) - \psi(\varepsilon u^k)\right) + \mathcal{O}(10^{-16})$.

Darstellungssatz für Integrale: Die TR (s. u.) $f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ um 0 für $\mathbb{D} \subseteq {}^{\omega}\mathbb{C}$ ergibt mit $\grave{m}, n \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$

$$\uparrow_0^z \ldots \uparrow_0^{\zeta_2} f(\zeta_1) \downarrow \zeta_1 \ldots \downarrow \zeta_n = \widetilde{n}!\, f(z\mu_n) z^n. \square$$

Beispiel: Für die TRn $f(x), g(x) \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ gilt $\uparrow_0^x f(v) \downarrow v \uparrow_0^x \uparrow_0^y g(v) \downarrow v \downarrow y = f(x\mu_1)\check{g}(x\mu_2)x^3$.

Darstellungssatz für Ableitungen: Mit ${}^{\tilde{\nu}}\dot{\mathbb{C}} \subset \mathbb{D} \subseteq {}^{\omega}\mathbb{C}$ ergeben die n-ten Einheitswurzeln, die TR

$$f(z) := f(0) + \mathop{+}_{m=1}^{\omega} \widetilde{m}!\ {}^m f(0) z^m,$$

$\varepsilon := \tilde{2}^j \tilde{r}$, $j \in {}^{\omega}\mathbb{Z}$, $n = \epsilon^{\sigma} \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$, $u := \epsilon^{\tilde{n}\hat{\pi}}$ und der Konvergenzradius $r \in {}^{\nu}\mathbb{R}_{>0}$ von f

$${}^n f(0) = 2^{jn}\acute{n}! \mathop{+}_{k=1}^{n} \delta_n^* f(\tilde{2}^j u^k). \square$$

Universeller Mehrschrittsatz: Mit $n \in {}^{\nu}\mathbb{N}_{\leq p}$, $k, m, p, q \in {}^{\nu}\mathbb{N}^*$, $\downarrow x \in]0, 1[$, $x \in [a, b] \subseteq {}^{\omega}\mathbb{R}$, $y : [a, b] \to {}^{\omega}\mathbb{R}^q$, $f : [a, b] \times {}^{\omega}\mathbb{R}^{q \times n} \to {}^{\omega}\mathbb{R}^q$, $g_k(\vec{x}) := g_{\acute{k}}(x)$ und $g_0(a) = f(\tilde{a}, y_0, \ldots, y_{\acute{n}})$ ergibt die TR des Anfangswertproblems n-ter Ordnung $y'(x) = f(x, y((\rightharpoonup)^0 x), \ldots, (y(\rightharpoonup)^{\acute{n}} x))$

$$y(\vec{x}) = y(x) + \downarrow\vec{x} \mathop{\pm}_{k=1}^{p} \left(g_{p-k}(\vec{x}) \mathop{+}_{m=k}^{p} \widetilde{m}! \binom{\acute{m}}{\acute{k}} \right) + \mathcal{O}((\downarrow\vec{x})^{\grave{p}}). \square$$

Auf- und Ableitungssatz für TRn: Mit $m \in {}^{\omega}\mathbb{Z}$, $q = \tilde{\varepsilon}(z - a)$, $a \in \mathbb{D}$ und $j, k \in \mathbb{N}_{<n}$ ergeben modulare Arithmetik (vgl. [973], S. 302 – 311) und die n-ten Einheitswurzeln die entsprechende *DFT-Form*:

$${}^m f_n(z) := \tilde{n}(q^j)^{\mathrm{T}} \left(\delta_{jk} \widetilde{\varepsilon q}^m j!/(j - m)!\right)(\tilde{u}^{jk})\left(f(\varepsilon u^k + a)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^n). \square$$

Umkehrsatz für TRn: Für $y \in f(\mathbb{D})$, $y(a) = b$ und ${}^1 y(a) \neq 0$ ergibt der Satz von Bürmann ([1076], S. 129 ff.):

$$f^{-1}(y) = a + \tilde{n} \mathop{+}_{m=1}^{n} \widetilde{m}\tilde{\varepsilon}^{\acute{m}}(y - b)^m \left(\tilde{u}^{\acute{m}k}\right)\left(f(\varepsilon u^k + a)^{-m}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^n). \square$$

Bemerkung: Ein hinreichend kleines $|a - z_0|$ liefert für $y = 0$ eine Nullstelle $z_0 \in {}^{\omega}\mathbb{C}$ von $f(z) \in {}^{\omega}\mathbb{C}$.

Ableitungssatz für Fourierreihen: Mit $f \in \mathcal{C}_{\pi}^{m+2}$ (vgl. [739], S. 358 ff.), $m \in {}^{\omega}\mathbb{N}$, $j \in [-\acute{n}, n] \cap \mathbb{Z}$, $t \in [-\pi, \pi]$ und $k \in \mathbb{N}_{<\hat{n}}$ ergibt sich mit der Möglichkeit zur gliedweisen Integration folgende DFT-Form:

$$^{m}f_n(t) := \tilde{n}\left(u^{\tilde{\pi}jnt}\right)^{\mathrm{T}}\left(\delta_{(j+\acute{n})k}\underline{j}^m\right)(\tilde{u}^{jk})\left(\check{f}(\tilde{n}\pi k-\pi)\right)+\mathcal{O}(\tilde{n}).\square$$

Folgerung: Die Stützstellen $kr := \tilde{n}\pi k$ des glatten $f(kr)$ liefern mit j wie k interpolierend in $\mathcal{O}(\sigma n)$:

$$^{m}f_n(t) := \tilde{n}(u^{\check{r}jt})^{\mathrm{T}}\left(\delta_{jk}\underline{j}^m\right)(\tilde{u}^{jk})\left(\check{f}(kr)\right).\square$$

Satz (DFT-Fixpunktverfahren): Jedes $z \in {}^{\omega}\mathbb{C}$ eines beliebigen m-Polynoms $p(z) = 0$ mit $m \in [2, n] \cap \mathbb{N}$ für $n := 2^r$, $r \in {}^{\nu}\mathbb{N}$ und Koeffizienten aus ${}^{\nu}\mathbb{C}$ lässt sich (als Anschub) ebenfalls in $\mathcal{O}(\sigma n)$ bestimmen.

Beweis und Algorithmus: Sei $U = (\tilde{u}^{jk})$ mit $j, k \in \mathbb{N}_{<n}$, $u := \epsilon^{\tilde{n}\hat{\underline{\pi}}}$, $q := \hat{z}$ und $\mathrm{s}_k := p(\tilde{2}u^k)$. Eine einfache Transformation erreicht $|q| < \tilde{2}$ für alle Nullstellen ζ von $p(z)$ und $p(0) = 1$. Für $p(z) = \tilde{n}(q^j)^{\mathrm{T}}U\mathrm{s} = \tilde{n}\mu^{\mathrm{T}}\mathrm{s} = 0$ ergibt sich die vereinfachte Iteration $\mu^* = U_1^{-T}\mu\, U((\delta_{jk}\tilde{u}^j)\, U^{-1}\mu - (U_{\acute{n}}^{-1}\mu + \beta\mathrm{s}^{\mathrm{T}}\mu, \beta\mathrm{s}^{\mathrm{T}}\mu, \ldots, \beta\mathrm{s}^{\mathrm{T}}\mu)^{\mathrm{T}})$ mit dem Kronecker-Delta δ_{jk}, dem Startpunkt $q := \tilde{2}$ und $\beta \in {}^{\nu}\mathbb{C}$, sodass jeweils sich $\|\mu^* - \mu\|$ ungefähr halbiert und $\mu^{\mathrm{T}}\mathrm{s} = 0$ gilt. Für $m > 2$ bildet Polynomdivision den Schluss.$\square$

Bemerkung: Die Identität anstatt δ_n^* liefert beliebig genaue Näherungen für die ${}^{n}f$. Letztere Sätze gelten für mehrdimensionale TRn und Laurent-Reihen ebenso. Der Fehler für analog definierte m-dimensionale DFT-Formen der TR mit je $\binom{m+n}{n}$ Ableitungen ist bei vergleichbarem Aufwand $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$ statt $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Eine gute Wahl für die *Kronpunkte* $\varepsilon u^m + a$ um den *Kronmittelpunkt* a ist $\varepsilon = \tilde{2}$ und $n = 64$.

Approximationssatz: Für $x \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ und $m, n \in {}^{\nu}\mathbb{N}$ erlauben die ${}^{s}f(x) \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ wie oben die Interpolante

$$g(x) := +_{r=0}^{\acute{m}}\chi_{]x_r,x_{\grave{r}}[}(x)\ \left((x_{\grave{r}} - x)p_r(x) + (x - x_r)p_{\grave{r}}(x)\right)/(x_{\grave{r}} - x_r) + +_{r=0}^{m}\chi_{\{x_r\}}(x)p_r(x)$$

mit $p_r(x) := +_{s=0}^{n}{}^{s}f(x_r)(x - x_r)^s/s!$ in $\mathcal{O}(\sigma mn)$ zu berechnen, wobei ${}^{s}f(x_r) = {}^{s}g(x_r)$ für alle $x_r \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ gilt. Im Komplexen ist ${}^{\omega}\mathbb{R}$ durch ${}^{\omega}\mathbb{C}$ zu ersetzen und es gelte $x = \gamma(t) \in {}^{\omega}\mathbb{C}$ für den Weg $\gamma(t)$ mit $t \in {}^{\omega}\mathbb{R}$.$\square$

Differenzialgleichungssatz: Sei $d(z) \in {}^{\omega}\mathbb{C}^{n+2}$ Vektor von DFT-Formen mit $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}$. Hat das System ${}^{\grave{n}}y = \left({}^{n}y, {}^{\acute{n}}y, \ldots, y, 1\right)d(z_1) \in {}^{\omega}\mathbb{C}$ mit / ohne $\left({}^{n}y(a), {}^{\acute{n}}y(a), \ldots, y(a)\right)^{\mathrm{T}} \in {}^{\omega}\mathbb{C}^{\grave{n}}$ und $a, z \in {}^{\omega}\mathbb{C}$ die Lösung y_0, so lässt diese sich in $\mathcal{O}(n^3)$ mit dem zuvor genannten Fehler bestimmen.$\square$

Bemerkung: Werden Funktionswerte von Kronpunkten ausgewertet und abbrechende TRn bzw. Polynome genutzt, lassen sich sowohl eine Polynomdivision ausführen als auch nichtlineare bzw. partielle (Systeme von) Differenzialgleichungen über DFT-Formen lösen.

Beispiel: Mit $b = (f(\varepsilon u^0 + a), \ldots, f(\varepsilon u^{\acute{n}} + a), 1)^{\mathrm{T}} \in {}^{\omega}\mathbb{C}^{\grave{n}}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $T(z) \in {}^{\omega}\mathbb{C}^{\grave{n}\times\grave{n}}$ haben gewöhnliche Differenzialgleichungen nur Lösungen, wenn $T(z)b = 0$ gilt (Cholesky-Zerlegung!).

Definition: Um die Genauigkeit zu erhöhen, sei nach der *Trapezregel* ${}^{T}\uparrow_{z\in A} f(z)\downarrow z := +_{z\in A}\tilde{2}\left(f(z) + f(\vec{z})\right)(\vec{z} - z)$ und nach der *Mittelpunktregel* ${}^{M}\uparrow_{z\in A} f(z)\downarrow z := +_{z\in A} f\left(\tilde{2}(z + \vec{z})\right)(\vec{z} - z)$. $\triangle$

Reihensatz für Integrale: Für $c \in [0, a]$, $f \in \mathcal{C}^n$ und $n, \hat{p}, r\ (= 2^p)$, $t\ (= 2^\nu)$, $\hat{v} \in {}^{\nu}2\mathbb{N}^*$ zeigen DFT-Formen der TR

$$\uparrow_0^a f(w)\downarrow w = \uparrow_0^{\tilde{t}a} +_{s=1}^{t} f(x + \acute{s}\tilde{t}a)\downarrow x = \uparrow_0^1 g(y)\downarrow y = +_{\check{q}=1}^{\check{r}} +_{\check{m}=0}^{\check{n}-1}\widetilde{\acute{m}!}\ {}^{m}\hat{g}(\check{r}\acute{q})\check{r}^{\grave{m}} + \mathcal{O}\left(\tilde{n}!\ {}^{n}g(\tilde{a}c)\check{r}^n\right).\square$$

Bemerkungen: DFT-Äquivalente können die ${}^{m}g$ mit $g(y) = af(ay)$ und $a > 0$ ersetzen. Die Transformation $z := \epsilon^{\pm x}$ macht hier unendliche Integralgrenzen endlich. Ein endliches Integral verringert den Betrag des Restglieds hinreichend. Die Mittelpunktregel ist hier vorteilhafter als die Trapezregel.

Beispiel: Mit ${}_{\mp}g(\vartheta) := \check{\pi}\left(1 - \varepsilon^2\sin^2(\check{\pi}\vartheta)\right)^{\mp\tilde{2}}$ ist das vollständige elliptische Integral I. und II. Art

$$\uparrow_0^1 {}_{\mp}g(\vartheta)\downarrow\vartheta = {}_{\mp}g(\check{1}) + \widetilde{24}\,{}_{\mp}^{2}g(\check{1}) + \widetilde{1920}\,{}_{\mp}^{4}g(\check{1}) + \mathcal{O}\left(\tilde{9}!\ {}_{\mp}^{6}g(\check{1})\right).$$

Zweite Euler-Maclaurin-Formel: Für $f(\check{q}) = g(\check{r}\acute{q})$ und $k = \grave{a} = \grave{r}$ liefert der vorangehende Satz in $\mathcal{O}(\sigma n)$

$$+_{\check{q}=1}^{\check{r}} f(\check{q}) = \uparrow_{\check{1}}^{\check{k}} f(x) \downarrow x + +_{\check{m}=1}^{\check{n}-1} H_m \left({}^{\acute{m}} f(\check{k}) - {}^{\acute{m}} f(\check{1}) \right) + \mathcal{O}\left(H_n \left({}^{\acute{n}} f(\check{k}) - {}^{\acute{n}} f(\check{1}) \right) \right).$$

Beweis: Für $h(x) = x/sin\, x$ und $H_m := \underline{1}^m \widetilde{m!}\ {}^m g(0) = \widetilde{m!}\, B_m(2 - 2^m) \to 2\underline{\tilde{\pi}\text{-}}^m$ folgt aus

$$+_{\check{q}=1}^{\check{r}} g(\widetilde{r\check{q}}) = \check{r} \uparrow_0^1 g(y) \downarrow y - +_{\check{q}=1}^{\check{r}} +_{\check{m}=1}^{\check{n}-1} \widetilde{\check{m}!}\ {}^m g(\widetilde{r\check{q}}) \tilde{r}^m + \mathcal{O}\left(\tilde{n}!\ {}^n g(\tilde{a}c) \tilde{r}^{\acute{n}} \right)$$

durch Einsetzen und Zusammenfassen der in Abhängigkeit von Partitionen gezählten Fakultäten die Behauptung, wobei die B_m Bernoulli-Zahlen sind und $B_{\acute{m}} = 0$, $B_0 = 1$ sowie $B_1 = -\tilde{2}$ gilt.□

Erste Euler-Maclaurin-Formel: Vollständige Induktion nach n zeigt ebenso (vgl. [1096], S. 193 f.)

$$+_{\check{q}=0}^{\check{r}} f(\check{q}) = \uparrow_0^{\check{r}} f(x) \downarrow x + \check{f}(\check{r}) + \check{f}(0) + +_{\check{m}=1}^{\check{n}-1} \widetilde{m!}\, B_m \left({}^{\acute{m}} f(\check{r}) - {}^{\acute{m}} f(0) \right) + \mathcal{O}\left(\tilde{n}!\, B_n \left({}^{\acute{n}} f(\check{r}) - {}^{\acute{n}} f(0) \right) \right). \square$$

Zahlentheorie

Das Folgende setzt Mengenlehre, Topologie und Nichtstandardanalysis voraus. Sei $k \in \mathbb{N}$.

Primzahlsatz: Für $\pi(x) := |\{p \in \mathbb{P}_{\leq x} : x \in {}^{\omega}\mathbb{R}\}|$ gilt $\pi(\omega) = {}_{\epsilon}\widetilde{\omega}\ \omega + \mathcal{O}\left({}_{\epsilon}\omega\ \omega^{\tilde{2}}\right)$.

Beweis: Intervalle fester Länge $y \in {}^{\omega}\mathbb{R}_{>0}$ erlauben $\check{y}$ Mengen-2-Tupel von Primzahlen so zu bilden, dass das erste Intervall eine unveränderte repräsentative Primzahldichte hat und das zweite Intervall leer ist, dann auf ein Intervall mit den zweitmeisten eines mit den zweitwenigsten Primzahlen folgt usw. Die Stirlingformel (s. Nichtstandardanalysis) legt die Primzahllücke $n = \epsilon^{\sigma} = \mathcal{O}({}_{\epsilon}(n!))$ mit $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 2}$ nahe.

Impliziert der Induktionsanfang $n = 2$ bzw. 3 die Annahme, dass mit $x_4 \in [2, 4[$ das erste Intervall $x_n/{}_{\epsilon}x_n$ Primzahlen enthält, so beweist der Schritt von x_n nach $\mathrm{x}_{\mathrm{n}}^2$, dass $\pi(\mathrm{x}_{\mathrm{n}}^2) = \pi(x_n)\check{\mathrm{x}}_n$ Primzahlen nur aus $\pi(x_n) = x_n/{}_{\epsilon}x_n$ folgen. Die Primzahllücke beträgt durchschnittlich ${}_{\epsilon}x_n$, maximal ${}_{\epsilon}\mathrm{x}_{\mathrm{n}}^2$ (s. u. Folgerung von Cramér) und die maximale Entsprechung von $\mathrm{x}_{\mathrm{n}}^2$ zu x_n ist ω zu $\omega^{\tilde{2}}$.□

Bemerkung: Ersetzt $m \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{>2}$ bei $\tilde{\mathrm{m}}\mathrm{y}^{\acute{\mathrm{m}}}$ Mengen-m-Tupeln die 2, bleibt das Ergebnis gleich. Vollständige Induktion und das Sieb des Eratosthenes zeigen mit dem dirichletschen Primzahlsatz je unendlich viele prime und zusammengesetzte Mersenne-Zahlen $M_n := 2^n - 1$ für $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ auf (s. [455], S. 174 f. und 354 – 365).

Satz von Singmaster: Es gibt maximal 8 verschiedene Binomialkoeffizienten gleichen Werts > 1.

Beweis: Die Existenz ist klar wegen $\binom{3003}{1} = \binom{78}{2} = \binom{15}{5} = \binom{14}{6}$ und dem Aufbau des Pascalschen Dreiecks. Mit $p \in {}^{\omega}\mathbb{P}$, $a, b, c, d \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$, $\hat{\mathrm{a}} \leq r := p - b$, $\hat{\mathrm{a}} < \hat{\mathrm{c}} \leq n := p - d$, $b < d$ und $s \notin \mathbb{P}$ für alle $s \in [\max(\mathrm{r}\text{-}\acute{\mathrm{a}}, \grave{\mathrm{n}}), r]$ ergeben die Stirlingformel $\mathrm{n}!^2 \sim \pi(\hat{\mathrm{n}} + \tilde{3})(\tilde{\epsilon}\mathrm{n})^{\hat{\mathrm{n}}}$ und der Primzahlsatz $\omega\binom{\mathrm{r}}{\mathrm{a}} \leq {}_{\epsilon}\omega\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{c}}$ für $p \to \omega$.□

Satz von Giuga: Genau dann ist $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 2}$ eine Primzahl, wenn $\mathop{+}_{\mathrm{k}=1}^{\acute{\mathrm{n}}} \mathrm{k}^{\acute{\mathrm{n}}} \equiv -1 \bmod n$ gilt.

Beweis: Der (kleine) fermatsche Satz erledigt den Fall $n \in {}^{\omega}\mathbb{P} \cup {}^{\omega}2\mathbb{N}^*$. Aus dem harmonischen und geometrischen Mittel H_n bzw. G_n folgt andernfalls $\mathop{+}_{\mathrm{p}\in{}^{\omega}\mathrm{P}} \tilde{\mathrm{p}} - \mathop{\times}_{\mathrm{p}\in{}^{\omega}\mathrm{P}} \tilde{\mathrm{p}} = m/H_n - \mathrm{G}_{\mathrm{n}}^{-\mathrm{m}} = c \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ (vgl. D. Borwein, J. M. Borwein, P. B. Borwein und R. Girgensohn: *Giuga's Conjecture on Primality*. Amer. Math. Monthly 103:40-50, 1996, S. 3 f.): Dies widerspricht $c < 1$ aufgrund von $H_n(m) \neq H_n = H_n(m, n) = m/(c + \tilde{\mathrm{n}}) < \mathrm{n}^{\tilde{\mathrm{m}}} = G_n$.□

Primzahllückensatz: Für die Menge M_g der mittelbaren Primzahllücken gilt $M_g \supset {}^{\omega}2\mathbb{N}^* \cup \{1\}$.

Beweis durch vollständige Induktion: Behauptung ist, dass neben 1 die mittelbaren Primzahllücken m_{p} von 2 bis $\acute{\mathrm{p}}$ existieren. Sie stimmt für die Primzahlen $p \in \{2, 3\}$. Der Primzahlsatz lässt beim Schritt von $p \longrightarrow p + 2$ keine größere als die aufgetretenen Primzahllücken als $\mathrm{m}_{\mathrm{p}+2}$ zu. Daher existiert auch $\grave{\mathrm{p}}$.□

Satz von Goldbach: Jede gerade Zahl > 2 ist Summe zweier Primzahlen.

Beweis: Mit $\hat{\mathrm{m}} + \hat{\mathrm{n}} = \mathrm{p}_{\mathrm{m}+\mathrm{r},\mathrm{n}-\mathrm{r}} + \mathrm{q}_{\mathrm{m}+\mathrm{r},\mathrm{n}-\mathrm{r}} + \mathrm{r}$, $r \in \{0, 2, \ldots, \max(g(n))\}$ gilt zugleich $\hat{\mathrm{m}} + \hat{\mathrm{n}} = \mathrm{p}_{\mathrm{m}+\mathrm{s},\mathrm{n}-\mathrm{s}} + \mathrm{q}_{\mathrm{m}+\mathrm{s},\mathrm{n}-\mathrm{s}} + \mathrm{s}$, $s \in \{0, 2, \ldots, \max(g(n)) + 2\}$. Daraus folgt $\hat{\mathrm{m}} + \hat{\mathrm{n}} + 2 = \mathrm{p}_{\grave{\mathrm{m}}+\mathrm{r},\grave{\mathrm{n}}-\mathrm{r}} + \mathrm{q}_{\grave{\mathrm{m}}+\mathrm{r},\grave{\mathrm{n}}-\mathrm{r}} + \mathrm{r}$, $r \in \{0, 2, \ldots, \max(g(\grave{\mathrm{n}}))\}$. Vollständige Induktion liefert dann die Behauptung mit dem vorigen Satz.□

Folgerung von Fortune: Der vorige Satz ergibt das Bertrandsche Postulat aus ([455], S. 34 f.) und mit p_n als der n-ten Primzahl $\min\{j \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 2} : m = p_n\# \pm j \in {}^{\omega}\mathbb{P}\} = \mathrm{p}_{\grave{\mathrm{n}}+\mathrm{k}}$ wegen $j \perp m$ für alle $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$.□

Erste Folgerung von Hardy-Littlewood: Für die Anzahl der Primzahlzwillinge gilt $\pi_2(\mathrm{n}) \sim \mathrm{C}_2\ \hat{\mathrm{x}}\,{}_{\epsilon}\widetilde{\mathrm{x}^2}$.□

Zweite Folgerung von Hardy-Littlewood: Für jedes $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 2}$ gibt es unendlich viele prime n-Tupel.□

Folgerung von Cramér: Für alle $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 2}$ und $s = \mathop{+}_{\mathrm{m}=0\ {}_{\epsilon}\mathrm{m}}^{\omega}(\mathrm{n})$ gibt es $p \in {}^{\omega}\mathbb{P}$ mit $\lfloor \sigma n \rfloor \leq p \leq \lceil {}_{\epsilon}s\ s \rceil$.□

Satz zur zweiten Hardy-Littlewood-Vermutung: Für $m, n \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt $\pi(m + n) \leq \pi(m) + \pi(n)$.

Vollständiger Induktionsbeweis nach n: Die Fälle $\pi(m+\grave{n}) = \pi(m+n)$ bzw. $\pi(\grave{n}) = \grave{\pi}(n)$ und $\pi(m+\grave{n}) = \grave{\pi}(m+n)$ sind klar. Liegt der letzte Fall mit $\pi(\grave{n}) = \pi(n)$ vor, folgt die Behauptung mit $m := n+k$ und $\pi(n) = \tilde{\sigma}n + \mathcal{O}(\sigma n^{\tilde{2}})$ wegen $\grave{\pi}(\hat{n}+k) \leq \pi(n+k) + \pi(n)$ und $\pi(4) \leq \hat{\pi}(2)$ usf. aus

$$(n+k)({}_{\epsilon}(\hat{n}+k)\text{-}{}_{\epsilon}(n+k))\sigma + n({}_{\epsilon}(\hat{n}+k)\text{-}\sigma){}_{\epsilon}(n+k) \geq {}_{\epsilon}(\hat{n}+k){}_{\epsilon}(n+k)\sigma.\square$$

Koeffizientensatz für ω-AZen: Keine Nullstelle normierter irreduzibler Polynome und Reihen mit mindestens einem $a_k \notin {}^{\omega}\mathbb{Z}$ ist ω-AZ, da diese paarweise verschieden und eindeutig bestimmt sind.□

Schrankensatz für ω-AZen: Kein $z \in \mathbb{C}^*$ mit $|z| \notin [\tilde{\omega}, \omega]$ ist ω-AZ.

Beweis: Den reellen Fall lösen in einer Polynom- oder Reihengleichung der Ansatz $a_m = 1$ und $a_k = -\acute{\omega}$ für $k < m$ mit Bilden des Kehrwerts und die GR. Das Ersetzen von ω jeweils durch $\omega(m) = \omega - \acute{\omega}/\omega(m)^m$ liefert die exakten Grenzwerte. Den komplexen Fall löst u. a. $x = \grave{y}\omega$ mit $y \in {}^{\omega}\underline{\mathbb{R}}^*$.□

Folgerungen: Für jedes $z \in \mathbb{R} + \underline{\mathbb{R}}$ mit $|z| \notin \mathbb{B}$ und $\eta := z^{\grave{\omega}}$ ist die GR $\bigplus_{n=0}^{\omega} z^n = \acute{\eta}/\acute{z} \notin {}^{\omega}_{\omega}A_C$. Mit $k = \omega^2!$ gilt $\Gamma(z) := k!\, k^z/(z\grave{z} \dots (z+k)) \notin {}^{\omega}_{\omega}A_R$ für alle $z \in {}^{\omega}\mathbb{R} \setminus -{}^{\omega}\mathbb{N}$. Für die Eulersche Zahl gilt $\epsilon = (1+\tilde{\omega})^{\omega} = (k\omega + 1)/\omega! \notin {}^{\omega}_{\omega}A_R$ mit $k > \omega$ (Exponentialreihe).□

Anzahlsatz der AZen: Mit der Riemannschen Zetafunktion ζ und der durchschnittlichen Anzahl $z(m)$ der Nullstellen eines $\grave{m}$-Polynoms oder einer $\grave{m}$-Reihe haben die AZen für $\check{\kappa} = n$ asymptotisch die Anzahl

$$\mathbb{A}(m,n) = \widetilde{\zeta(\grave{m})}z(m)\grave{\kappa}^m\big(n + O(\sigma)\big).$$

Beweis: Der Fall $m = 1$ hat nach ([455], S. 323) den Korrekturterm $\mathcal{O}(\sigma n)$ und gibt die Anzahl $4 \bigplus_{k=1}^{n} \varphi(k) - 1$ der Brüche über die eulersche φ-Funktion wieder. Für $m > 1$ ändern die Teilbarkeitsverhältnisse weder den Korrekturterm $\mathcal{O}(\sigma)$ noch den Hauptterm. Durch $1/\zeta(\grave{m}) = \bigtimes_{i=1}^{n} (1 - \tilde{p}_i^{\grave{m}})$ (GRn!), das Vielfache primer p_i entfernt, werden Polynome und Reihen mit $\mathrm{ggT}(a_0, a_1, \dots, a_m) > 1$ ausgeschlossen.□

Beispiele: Für $m = 1$ gibt es $3(n/\check{\pi})^2 + O(\sigma n)$ reelle und für $m = 2$, da ein reelles Polynom vom Grad 2 nach der a-b-c-Formel zwei reelle Nullstellen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{16}$ hat, $\check{9}n^3/\zeta(3) + \mathcal{O}(\sigma n^2)$ reelle Lösungen. Für $a_m = 1$ existieren $z(m)\grave{\kappa}^{\grave{m}}(\kappa + \mathcal{O}(\sigma))$ ganzalgebraische Lösungen.

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes nicht-konstante Polynom $p \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ hat ein $z \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ mit $p(z) = 0$.

Indirekter Beweis: Eine affin-lineare Variablensubstitution erreicht $\widetilde{p(0)} \neq \mathcal{O}(\iota)$. Die Annahme von $p(z) \neq 0$ für alle $z \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ ergibt für das holomorphe $f(z) := \widetilde{p(z)}$ wegen $f(\tilde{\iota}) = \mathcal{O}(\iota)$ und aufgrund der Mittelwertungleichung $|f(0)| \leq |f|_{\gamma}$ (s. [473], S. 160) mit $\gamma = \partial^r\dot{C}$ und beliebigem $r \in {}^{(\omega)}\mathbb{R}_{>0}$, also $f(0) = \mathcal{O}(\iota)$ im Widerspruch zur Voraussetzung (und damit gilt exakt $z(m) = m$).□

Bemerkung: Im reellen Fall ist $z(m)$ asymptotisch gleich ${}_{\epsilon}m/\check{\pi} + \mathcal{O}(1)$ nach (Kac, Mark: *On the Average Number of Real Roots of a Random Algebraic Equation*; Bull. Amer. Math. Soc. 49 (4); 1943; 314 – 320).

Folgerung: Für $m = n = \acute{\nu} =: \epsilon^{\sigma}$ gilt $|{}^{\nu}\mathbb{A}_{\mathbb{R}}| = \tilde{\pi}\sigma\grave{\kappa}^{\acute{\nu}}(\hat{\nu} + O(\sigma))$ und $|{}^{\nu}\mathbb{A}_{\mathbb{C}}| = \grave{\kappa}^{\nu}(\check{\nu} + O(\sigma))$. □

Satz von Bunjakowski: Gilt $a_n > 0$ für ein Minimalpolynom $p \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ vom Grad n mit $p(i) \perp p(j)$ für alle ${}^{\omega}\mathbb{N}^* \ni i < j \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$, so hat es unendlich viele Primzahlen als Werte.

Beweis: Der dirichletsche Primzahlsatz liefert für $m \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ unendliche viele Primzahlen $q_m = bm + c$ mit festen $b \perp c \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$. Umgekehrt gibt es unendlich viele m, sodass $d_m := p(m) = \tilde{m}(q_m - c)$ ist. Wird letztere Formel umgestellt, ergibt vollständige Induktion nach dem Polynomgrad n die Behauptung.□

Satz: Für die BBP-Reihen $s_k := \bigplus_{n=1}^{\omega} p(n)q\widetilde{(n)}b^n$ mit $b \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 2}$ und ganzzahligen Polynomen bzw. Reihen p und q mit $q(n) \neq 0$ und $\deg(p) < \deg(q)$ gilt $s_k \notin {}^{\omega}_{\omega}A_R$ wegen $\mathrm{den}(s_k) \geq b^m > \omega$ mit $m \in \mathbb{N}^*$.□

Satz: Der Abstand zweier benachbarter reeller ω-AZen beträgt maximal $\Omega/\acute{\omega}$ mit der nicht ω-algebraischen Omega-Konstante $\Omega = \tilde{\epsilon}^{\Omega} = W(1)$ (s. u. Lambertsche W-Funktion).

Beweis: Der Abstand der reellen ω-AZen ist um ± 1 herum am größten. Die Zahl 1 approximiert ein $x \in {}^{\omega}\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$, das die Polynom- oder Reihengleichung $\acute{x}x^{\acute{m}}\acute{\omega} = 1$ für $x > 1$ oder $x^m = -\acute{x}\acute{\omega}$ für $x < 1$ erfüllt.□

Approximationssatz für reelle ω-AZen: Der durchschnittliche Fehler, um jede reelle ω-AZ vom Grad $n > 1$ durch eine reelle ω-AZ vom Grad $m < n$ zu approximieren, ist asymptotisch gleich $|{}^{\omega}\mathbb{Z}|^{-m}{}_{\epsilon}\widetilde{m}\zeta(\dot{m})\tilde{\pi}$.

Beweis: Die Anzahl der ω-AZen und innerhalb unveränderter Grenzen nahezu gleichmäßig verteilten Zahlen nimmt in ${}^{\omega}\mathbb{R}$ pro Grad mehr ca. um den Faktor $|{}^{\omega}\mathbb{Z}|$ zu. Der Fehler entspricht dem Abstand der ω-AZen untereinander. In ${}^{\omega}\mathbb{C}$ liegen ω-AZen weniger dicht.□

Folgerung: Zwei verschiedene reelle ω-AZen haben durchschnittlich mindestens den Abstand $|{}^{\omega}\mathbb{Z}|^{-\acute{\omega}}{}_{\epsilon}\widetilde{\omega}\pi$. Die genaue Bestimmung des Minimalabstands erfordert ein unendliches nicht-lineares nicht-konvexes Optimierungsproblem zu lösen. Damit haben reelle ν-AZen eine Approximationsordnung von $\mathcal{O}(\nu)$. Dies widerlegt den Satz von Thue-Siegel-Roth, der von falschen Voraussetzungen ausgeht.□

Satz von Gelfond-Schneider: Mit $a, c \in {}^{\omega}\mathbb{A}_{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{B}$ und infinitesimalem ε, $b \in {}^{\omega}\mathbb{A}_{\mathbb{C}} \setminus {}^{\omega}_{\omega}\mathrm{R}$ gilt $a^b \notin {}^{\omega}_{\omega}\mathrm{A}_{\mathrm{C}}$.

Indirekter Beweis: Die Minimalpolynome p (und q) von c^r bzw. $c^{r\pm\varepsilon} = a^b$ mit maximalem $r \in {}^{\omega}_{\omega}\mathrm{R}_{>0}$ und $f = p\ (q)$ ergeben den Widerspruch ${}^{1}\mathrm{f}(c^{r(\pm\varepsilon)}) \neq 0 = (f(c^r) - f(c^{r\pm\varepsilon}))\ /\ (c^r - c^{r\pm\varepsilon}) = {}^{1}\mathrm{f}(c^{r(\pm\varepsilon)})$.□

Größte-Primzahl-Kriterium (GPK) für ω-AZen: Gilt bei gekürzten Brüchen $r := \widetilde{\mathrm{ap}}b \pm \tilde{\mathrm{s}}t \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ mit natürlichen a, b, s und t, $abst \neq 0$ und $a + s > 2$ sowie der (zweit-)größten Primzahl $p \in {}^{\omega}\mathbb{P}$, $p \nmid b$ und $p \nmid s$, so gilt $r \notin {}^{\omega}_{\omega}\mathrm{A}_{\mathrm{R}}$, da der Primzahlsatz $\mathrm{den}(\widetilde{\mathrm{aps}}(bs \pm apt)) \geq \hat{\mathrm{p}} \geq \hat{\omega} - \mathcal{O}({}_{\epsilon}\omega\ \omega^{\tilde{2}}) > \omega$ impliziert.□

Satz: Die Konstanten von Catalan (G), Gieseking ($\pi\ {}_{\epsilon}\beta$), Smarandache (S_1) und Taniguchi (C_{T}) sind nicht ω-algebraisch aufgrund des GPKs.□

Satz: Es gilt $\pi \notin {}^{\omega}\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ sofern die unterschiedlichen Darstellungen als Wallis-Produkt oder Produktdarstellung der Gammafunktion für den Wert $\tilde{2}$ akzeptiert werden (s. Nichtstandardanalysis), oder alternativ durch Anwendung des GPKs auf die Leibnizsche Reihe oder die $\arcsin(x)$-TR für $x = 1$.□

Satz: Die Konstanten von Artin (C_{Artin}), Baxter (C^2), Chaitin (Ω_{F}), Champernowne (C_{10}), Copeland-Erdős (C_{CE}) (gilt bei jeder Basis aus ${}^{\omega}\mathbb{N}^*$), Erdős-Borwein (E), Feller-Tornier (C_{FT}), Flajolet und Richmond (Q), Glaisher-Kinkelin (A), Heath-Brown-Moroz (C_{HBM}), Landau-Ramanujan (K), Liouville ($£_{\mathrm{Li}}$), Murata (C_{M}), Pell (P_{Pell}), Prouhet-Thue-Morse (C_{PTM}), Sarnak (C_{sa}) und Stephen (C_{S}) sowie die Euler- bzw. Landau-Totient-Konstante (ET bzw. LT), die Primzahlzwillingskonstante (C_2) und die Carefree-Konstanten (K_1, K_2 und K_3) sind keine ω-AZen, da je keine gewisse Primzahlpotenz aus Zähler oder Nenner kürzbar ist.□

Satz: Die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen samt ihren Umkehrfunktionen, die Digammafunktion ψ, die Lambertsche W-Funktion, die Funktion Ein, der (hyperbolische) Integralsinus S(h)i, die Eulersche Betafunktion B und mit $s, u \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ sowie $t \in {}^{\omega}\mathbb{N}$ die verallgemeinerte Fehlerfunktion E_{t}, die hypergeometrische Funktion ${}_0F_t$, die Fresnel-Integral-Funktionen C und S und die Bessel-Funktion I_t bzw. die erster Gattung J_t, die Legendresche Funktion χ_{s}, die Polygammafunktion ψ_{s}, die verallgemeinerte Mittag-Leffler-Funktion $E_{s,t}$, die Dirichletreihe $+_{\mathrm{n}=1}^{\omega}\ \tilde{\mathrm{n}}^{\mathrm{s}}\mathrm{f}(\mathrm{n})$ mit maximal endlichen reellen $|f(n)|$, die Primzetafunktion $P(s)$, der Polylogarithmus Li_s sowie die Lerchsche Zeta-Funktion $\Phi(q, s, r)$ liefern für reelle Argumente und maximal endliche reelle $|q|$ und $|r|$, bei denen die zugehörige TR konvergiert, keine ω-AZen.

Beweis: GPK, Dirichletscher Primzahlsatz und Wallis-Produkt liefern die Behauptung. Sie folgt bei der Digammafunktion aus dem Beweis der ω-Transzendenz der Eulerschen Konstante γ (s. u.).□

Satz: Mit $\mathrm{Li}_{\mathrm{s}}(\mathrm{z}) := +_{\mathrm{n}=1}^{\omega}\ \tilde{\mathrm{n}}^{\mathrm{s}}\mathrm{z}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{z} \in {}^{1}\dot{\mathbb{C}}$ und $s \in {}^{\omega}\mathbb{C}$ sei $\gamma := \mathrm{Li}_1(1) - {}_{\epsilon}\omega = \uparrow_1^{\omega}\ (\widetilde{[\mathrm{x}]}\text{-}\tilde{\mathrm{x}})\downarrow \mathrm{x}$, wobei Umsummieren $\gamma \in\ ]0, 1[$ zeigt. Wird ${}_{\epsilon}\omega = \mathrm{Li}_1(\tilde{2})\ {}_2\omega$ akzeptiert, so gilt $\gamma \notin {}^{\omega}_{\omega}\mathrm{A}_{\mathrm{R}}$ auf $\mathcal{O}(\tilde{2}^{\omega}\widetilde{\omega}\ {}_{\epsilon}\omega)$ genau.

Beweis: Aus der GR folgt $-{}_{\epsilon}(-\acute{x}) = \mathrm{Li}_1(x) + \mathcal{O}(\widetilde{\omega}\mathrm{x}^{\dot{\omega}}/\acute{x}) + t(x)\downarrow \mathrm{x}$ für $x \in [-1, 1 - \tilde{\nu}]$ und $t(x) \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ mit $|t(x)| < \omega$. Dann werden der (kleine) fermatsche Satz und das GPK auf $\mathrm{den}(\tilde{\mathrm{p}}(1 - 2^{-p}{}_2\omega))$ für $p = \max {}^{\omega}\mathbb{P}$ angewandt.□

Satz: Nur dann gilt $+_{\mathrm{n}=-1}^{\omega}\widetilde{\mathrm{a_n b_n}} \notin {}^{\omega}_{\omega}\mathrm{R}$ für beliebige $\mathrm{b_n} \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$, wenn dies ebenfalls für $+_{\mathrm{n}=-1}^{\omega}\widetilde{\mathrm{a_n}}$ oder $\widetilde{\mathrm{a}_{-1}}\text{-}\widetilde{\mathrm{a}_{\omega}}$ mit $\mathrm{a_n} \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ zutrifft, da $\mathrm{b_n} := 1\ (+\ \mathrm{a_n})$ (Teleskopsumme) gesetzt werden kann (vgl. [889], S. 346).□

Satz: Aus $p^2 \nmid \mathrm{num}(q)\mathrm{den}(q)$ für alle $p \in {}^{\omega}\mathbb{P}$ mit $q \in Q := {}^{\omega}_{\omega}\mathrm{R}_{>0} \ni q^x$ und ${}_2\omega \gg |x| \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ folgt $x \in {}^{\omega}\mathbb{Z}$.

Indirekter Beweis: Sei o. B. d. A. $x > 0$. Da für nicht zu großes $x \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ der Satz gilt, sei nun $x \in Q \backslash {}^{\omega}\mathbb{N}^*$. Wegen $q^x \in {}^{\omega}A_{\mathbb{R}} \backslash Q$ sei nun $x := k/d \in {}^{\omega}\mathbb{R}_{>0} \backslash Q$ mit $d, k \in \mathbb{N}^*$ und $d \perp k$. Also gilt $q^k = r^d$ mit $r \in Q$. Der Fundamentalsatz der Arithmetik weist den Zähler oder Nenner von q bzw. r größer als 2^{ω} aus.□

Bemerkung: Der vorige Satz beweist die Vermutung von Alaoglu und Erdős, dass p^x und q^x genau dann ν-reell für verschiedene $p, q \in {}^{\nu}\mathbb{P}$ sind, wenn $x \in {}^{\nu}\mathbb{Z}$ mit nicht zu großem $|x|$ gilt.

Beispiel: Gibt es in $\mathrm{m}_{\grave{k}} := \left\lfloor \mathrm{m}_k^{\tilde{3}\cdot\chi_{2\mathbb{N}}(\mathrm{m}_k)} \right\rfloor$ keine Zyklen, folgt $\mathrm{m}_{\tilde{\imath}} = 1$ für jedes $m_0 \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}^*$.

Satz von Collatz: Aus $\hat{\mathrm{n}}_{\grave{k}} := \mathrm{n}_k + \chi_{2\mathbb{N}}(\acute{\mathrm{n}}_k)(5\mathrm{n}_k + 2)$ folgt $\mathrm{n}_{\tilde{\imath}} \in \{1, 2, 4\}$ für jedes $n_0 \in {}^{(\omega)}\mathbb{N}^*$.

Beweis: Ist der triviale Zyklus (hier nach (Slapničar, Ivan: *There are no cycles in the 3n + 1 sequence*, arXiv: 1706.08399v1)) der einzige, unterschreitet jedes solche öfter ab- als aufsteigende Verfahren jedes $n_0 \geq 2$, wie es der Erwartungswert von $3^{\tilde{2}}/2$ des vorigen Wertes anzeigt.□

Definition: Erfüllen zwei Zahlen $x_0, y_0 \in {}^{\omega}\mathbb{C}^*$ keine nicht-triviale Polynomgleichung $p(x, y) = 0$, so heißen sie *ω-algebraisch unabhängig*.△

Satz: Das GPK liefert mit $\epsilon = (1 + \tilde{\mathrm{p}})^p$ für maximales $p \in {}^{\omega}\mathbb{P}$ und π als Wallis-Produkt paarweise ω-algebraisch unabhängige Darstellungen von $A, C_2, \gamma, \epsilon, K$ und π.□

Bemerkung: Die Bedingungen sind nicht hinreichend wie die Beispiele $\mathrm{a_n} := 1, \mathrm{b_n} := 2$ bzw. $(\mathrm{a_n}) := (12, 12, 12, 12, 12, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots, \acute{\omega}\omega), \mathrm{b_n} := 1$ mit den Summen $\breve{\omega} + 1$ bzw. $(\omega\text{-}2)/\acute{\omega}$ zeigen. Zu $(n!)$ bzw. $(\mathrm{a_n})$ mit $\acute{\mathrm{a}}_{\grave{\mathrm{n}}} = \mathrm{a_n}\grave{\mathrm{a}}_{\mathrm{n}}$ gilt $\mathop{+}_{\mathrm{n}=1}^{\omega} \widetilde{\mathrm{a_n b_n}} \notin {}^{\omega}_{\omega}\mathrm{A_R}$ für $\mathrm{b_n} := \mathrm{n} + 2$ bzw. $\mathrm{b_n} := 1$.

Satz von Beal: Für $a^m + b^n = c^k$ mit $a, b, c \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ und $k, m, n \in {}^{\omega}\mathbb{N}_{\geq 3}$ gilt $\mathrm{ggT}(a, b, c) > 1$.

Beweis: Aus $\mathrm{b^n} = \left(\mathrm{c^{kq}}\text{-}\mathrm{a^{mr}}\right)\left(\tilde{\mathrm{c}}^{\mathrm{k}\acute{\mathrm{q}}} + \tilde{\mathrm{a}}^{\mathrm{m}\acute{\mathrm{r}}}\right) = \mathrm{c^k}\text{-}\mathrm{a^m} + \mathrm{c^{kq}}\tilde{\mathrm{a}}^{\mathrm{m}\acute{\mathrm{r}}}\text{-}\tilde{\mathrm{c}}^{\mathrm{k}\acute{\mathrm{q}}}\mathrm{a^{mr}}$ folgt $\mathrm{ggT}(a, c) > 1$ durch Potenzieren, da $\mathrm{f(q, r)} := \mathrm{c^{k(\hat{q}-1)}}\text{-}\mathrm{a^{m(\hat{r}-1)}} = 0$ in $q, r \in {}^{\omega}\mathbb{R}_{>0}$ nicht nur mit der einen Lösung $(\mathrm{q_0}, \mathrm{r_0}) = (\check{1}, \check{1})$ stetig ist.□

Folgerung: Die Fermat-Catalan-Vermutung lässt sich analog beweisen und ein unendlicher Abstieg wegen $\mathrm{ggT}(a, b, c) > 1$ ergibt, dass $a^n + b^n = c^n$ von keinem $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ für beliebige $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ erfüllt wird.□

Satz von Erdős-Moser: Die Faulhabersche Formel ergibt für $k, n \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$, dass mit $n\grave{\mathrm{n}} \mid \mathop{+}_{\mathrm{m}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m^k} = \grave{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}$ nur die Lösung $k = 1 = \acute{\mathrm{n}}$ wegen $1 < n \nmid \grave{\mathrm{n}}$ existiert.□

Drei-Kuben-Satz: Es gilt $S := \{n \in \mathbb{Z} : n \neq \pm 4 \bmod 9\} = \{n \in \mathbb{Z} : n = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)c(a - b + c) = (a + c)^3 + (b - c)^3 + c^3\} \subset a^3 + b^3 + c^3 + 6\mathbb{Z}$, da unabhängige vollständige Induktion nach den gleichberechtigten Variablen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ zunächst $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\} \subset S$ zeigt und dann die Behauptung.□

Satz von Brocard: Es gilt $\{(m, n) \in {}^{\omega}\mathbb{N}^2 : n! + 1 = m^2\} = \{(5, 4), (11, 5), (71, 7)\}$.

Beweis: Aus $n! = \acute{m}\grave{m}$ folgt $m = \hat{r} \pm 1$ für $r \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ und $n \geq 3$. Also ist $n! = \hat{r}(\hat{r} \pm 2) = 8s(\hat{s} \pm 1)$ mit $s \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$. Gelte $2^q \mid n!$ und $2^{\grave{q}} \nmid n!$ für maximales $q \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$. Damit ist $n! = 2^q(\hat{u} + 1)$ für $u \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ und zwingend $n! = 2^q(2^{q-2} \pm 1)$. Die Primfaktorzerlegung von $n!$ erfordert dann $n \leq 7$, was die Behauptung ergibt.□

Wilsonscher Primzahlsatz: Nur für die Primzahlen $p \in \{5, 13, 563\}$ gilt $q := p^2 \mid (\acute{\mathrm{p}}! + 1)$.

Indirekter Beweis: Wird danach eine geeignete Zweierpotenz links addiert und subtrahiert, liefert Division durch $\acute{\mathrm{p}}$ oder $\grave{\mathrm{p}}$ in $\hat{\mathrm{n}}\mathrm{q} + \acute{\mathrm{q}} = \acute{\mathrm{p}}!$ für $n \in {}^{\omega}\mathbb{N}^*$ rechts eine höhere ab hinreichend großem p.□

Satz von Littlewood in der herkömmlichen Mathematik: Mit $||\cdot||_d$ als *Abstand zur nächsten ganzen Zahl* gilt $\liminf_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{n}\|\mathrm{na}\|_{\mathrm{d}}\|\mathrm{nb}\|_{\mathrm{d}} = 0$ für alle $a, b \in {}^{\nu}\mathbb{R}$ und $n \in {}^{\nu}\mathbb{N}^*$.

Beweis: Für $k, m \in {}^{\nu}\mathbb{N}^*$ als Nenner der Kettenbruchentwicklung von a bzw. b mit Genauigkeit $g \in {}^{\nu}\mathbb{R}_{>0}$ und n/km immer wieder ganz liefert der dirichletsche Approximationssatz (s. [455], S. 63):

$$\liminf_{n\to\infty} n\|na\|_d\|nb\|_d = \liminf_{n\to\infty} n\, O(\tilde{n})^2 = \liminf_{n\to\infty} O(\tilde{n}) = 0. \square$$

Widerlegung durch die Nichtstandardmathematik: Für $a = b := \tilde{\omega}^{\check{3}}$ gilt $\omega\|\omega a\|_d\|\omega b\|_d = 1.\square$

Beispiel: Für $s \in {}^{(\omega)}\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) \leq 1$ und $z := \tilde{2}^{\acute{s}}$ hat $\zeta(s) = +_{n=1}^{\omega} \tilde{n}^s$ definitiv keine analytische Fortsetzung (vgl. [949], S. 4) und ist damit nullstellenfrei. Dies widerlegt die Riemannsche Vermutung:

$$\mp_{n=1}^{\omega} \tilde{n}^s = z +_{n=1}^{\breve{\omega}} \tilde{n}^s - +_{n=1}^{\omega} \tilde{n}^s \neq \acute{z} +_{n=1}^{\omega(/2)} \tilde{n}^s.$$

Satz: Da die Dirichletsche L-Funktion $L(s,\chi) = +_{n=1}^{\omega} \chi(n)\tilde{n}^s$ offenbar nur Nullstellen für $s = 0$ und nichttriviale Dirichlet-Charaktere $\chi(n)$ hat, widerlegt sie die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung.$\square$

Zeitrechnung im Achtersystem

Wir messen Zeit bisher in Jahren, Monaten, Wochen, Tagen, Stunden, Minuten und Sekunden. In jeweils Tausendsteln können Sekunden immer feiner bis zur Messgrenze unterteilt werden. Aber ist unsere Zeitrechnung praktisch?

Folgende drei Fragen sollen die Probleme verdeutlichen:

1. Wie viele Tage liegen zwischen dem 25.01.2004 und dem 11.11.2004?
2. Auf welchen Wochentag fällt der 11.11.2004?
3. Wie viele Sekunden liegen zwischen 09:12:06 Uhr und 11.11.11 Uhr?

Die Antwort auf Frage 1 hat die unterschiedliche Länge der Monate und Schaltjahre zu berücksichtigen.

Die Antwort auf Frage 2 hat darüber hinaus den Sieben-Tage-Rhythmus der Woche einzubeziehen und von einem Datum mit bekanntem Wochentag auszugehen.

Die Antwort auf Frage 3 erfordert die Umrechnung von Stunden und Minuten in 3600 bzw. 60 Sekunden.

Ich schlage daher folgende Zeitrechnung vor:

1. Es wird durchweg das Achtersystem verwendet.
2. Die Zeit wird angegeben: [[+/-]Jahr,][Tag].[Bruchteil des Tages] [Zusatz].
3. In der Woche wird zwischen Sonntag und Montag ein Erdtag eingeschoben.
4. Die Monate haben regulär vier Acht-Tage-Wochen.
5. Der letzte zwölfte Monat hat abweichend 13 Tage (im Schaltjahr 14).
6. Tag 0 ist Neujahr (1.1. bisher, Sonntag), Tag 1 ist Arbeitstag (Erdtag).
7. Das Jahr der Einführung ist das Jahr 0.
8. Zeitzonen entfallen und es gilt weltweit Greenwich-Zeit.

Erläuterungen:

Zu 1. (Es wird durchweg das Achtersystem verwendet.):

Wir verwenden zumeist das Dezimal- oder Zehnersystem (Basis 10, Ziffern 0 bis 9). Die Basis gibt die Anzahl der verschiedenen Ziffern eines Zahlensystems an. Zahlen können in anderen Zahlensystemen gleichwertig (nur mit anderem "Aussehen") dargestellt werden.

Zahlen, die größer sind als die höchste Ziffer angibt, werden durch Übertrag auf die nächste linke Stelle gebildet: Auf die 9 folgt die 10, auf die 99 die 100, auf die 999 die 1000 usw.

Der Mensch kann durchschnittlich maximal sieben Dinge auf einmal erkennen, ohne sie zählen zu müssen. Das Oktal- oder Achtersystem mit der Basis 8 besitzt die Ziffern 0 bis 7 und kommt hier der Natur des Menschen also entgegen.

Das Achtersystem lässt sich auf einfache Weise in andere Zahlensysteme umrechnen, die eine Potenz der Basis zwei sind. Neben dem Dual- oder Zweiersystem (Basis 2, Ziffern 0 und 1) zählen hierzu insbesondere das Tetral- oder Vierersystem (Basis 4, Ziffern 0 bis 3) und das Hexadezimal- oder Sechzehnersystem (Basis 16 Ziffern 0 bis 9 und A bis F).

Die meisten Computer beruhen auf dem Zweiersystem. Die Ziffern 0 und 1 geben an, ob Strom fließt oder nicht. Zahlen im Zehnersystem müssen für diese Rechner in das Zweiersystem umgewandelt werden, damit schnell gerechnet werden kann.

Je länger die Zahlen sind, desto zeitaufwändiger ist die Umrechnung. Für die Ausgabe im Zehnersystem ist eine erneute Umwandlung erforderlich. Bei der Umrechnung zwischen Zweier- und Zehnersystem treten im Nachkommabereich häufig umwandlungsbedingte Rundungen auf.

Hier einige Beispiele (die tiefgestellte Zahl gibt zur Unterscheidung der Zahlensysteme die Basis an):

$2004_{10} = 7D4_{16} = 3724_8 = 133110_4 = 11111010100_2$.

Wird 11111010100_2 von rechts ausgehend in Zweierblöcke durch | unterteilt in der Form $1|11|11|01|01|00_2$, so kann durch folgende Entsprechungen die Darstellung für 133110_4 gewonnen werden:
00 ≙ 0, 01 ≙ 1, 10 ≙ 2 und 11 ≙ 3. Ein erster Block mit einer Ziffer bleibt unverändert.

Für die Gewinnung von 3724_8 aus 11111010100_2 sind Dreierblöcke von rechts zu bilden: $11|111|010|100_2$. Die Entsprechungen lauten:
000 ≙ 0, 001 ≙ 1, 010 ≙ 2, 011 ≙ 3, 100 ≙ 4, 101 ≙ 5, 110 ≙ 6 und 111 ≙ 7. Ein erster Block mit weniger als drei Ziffern ist vorher durch Nullen links aufzufüllen.

Für die Gewinnung von $7D4_{16}$ aus 11111010100_2 sind Viererblöcke von rechts zu bilden: $111|1101|0100_2$. Die Entsprechungen lauten:
0000 ≙ 0, 0001 ≙ 1, 0010 ≙ 2, 0011 ≙ 3, 0100 ≙ 4, 0101 ≙ 5, 0110 ≙ 6, 0111 ≙ 7, 1000 ≙ 8, 1001 ≙ 9, 1010 ≙ A, 1011 ≙ B, 1100 ≙ C, 1101 ≙ D, 1110 ≙ E und 1111 ≙ F. Ein erster Block mit weniger als vier Ziffern ist vorher durch Nullen links aufzufüllen.

Allgemein sind bei einer Basis 2^n Blöcke mit n Ziffern der Darstellung im Zweiersystem von rechts zu bilden und der erste links stehende Block vorher mit Nullen auf n Ziffern von links aufzufüllen. Die Umwandlung funktioniert auch umgekehrt vom 2^n-System in das Zweiersystem. Ferner gibt es noch andere Algorithmen der Umwandlung.

Für die Gewinnung von $7D4_{16}$ aus 2004_{10} wird 2004_{10} fortwährend durch 16_{10} geteilt:
$2004_{10} / 16_{10} = 125_{10}$ Rest 4_{10};
$125_{10} / 16_{10} = 7_{10}$ Rest 13_{10};
$13_{10} / 16_{10} = 0_{10}$ Rest 7_{10}.

Die zweistelligen Reste werden ins Sechzehnersystem umgewandelt und von unten nach oben durchgegangen. Das gewünschte Ergebnis $7D4_{16}$ ergibt sich, wenn sie dabei von links nach rechts aneinandergereiht werden: $7_{10} = 7_{16}$,$13_{10} = D_{16}$ und $4_{10} = 4_{16}$.

Allgemein ist die umzuwandelnde Zahl durch die Basis des Zielsystems fortwährend zu teilen und die mehrstelligen Reste sind in die Schreibweise des Zielsystems umzuwandeln. Die gesuchte Zahl ergibt sich durch die Aneinanderreihung der Reste von links nach rechts, wenn in der Divisionsrechnung die Reste von unten nach oben durchgegangen werden.

Natürlich existieren hier andere Umwandlungsalgorithmen - auch in die andere Richtung. Da die fortwährende Division rechnerisch aufwändiger ist als die Ziffernersetzung in Ziffernblöcken, entsteht der angesprochene Zeitverlust. Nachkommastellen werden ähnlich umgewandelt.

Zu 2. (Die Zeit wird angegeben: [[+/-]Jahr,][Tag].[Bruchteil des Tages] [Zusatz].):

Die Reihenfolge ergibt sich aus der Sortierfähigkeit der Zeitangabe. Das + kann weggelassen werden; das - bezieht sich nur auf das Jahr. Wird der Bruchteil des Tages weggelassen, ergibt sich die Datumsangabe. Das Jahr kann ebenfalls weggelassen werden, wenn das Verständnis es zulässt.

Der Bruchteil wird als Folge von Oktalziffern angegeben. Aus optischen Gründen können die Ziffern rechts auf eine gerade Anzahl mit Nullen aufgefüllt werden (z. B. vier- oder sechsstellig). Zusatz kann beispielsweise sein: christlich, jüdisch oder islamisch oder eine Abkürzung. Der Standard ist ohne Zusatz.

Die Jahreszeiten Frühling, Sommer, Herbst und Winter und die Feiertage kehren regelmäßig wieder. Diese Regelmäßigkeiten sollen auf das Jahr gesehen erhalten bleiben, auch wenn es in den Details Unregelmäßigkeiten gibt.

Stunden werden aus Verwechslungsgründen nicht mehr verwendet. Der Tag wird grob in acht Teile (Okten genannt) geteilt. Eine Okte wird ferner in acht Teile (Lepten genannt) geteilt. Die Minute wird neu definiert als der 64. Teil einer Lepte. Die Sekunde wird neu definiert als der 262144. Teil eines Tages (64 * 64 * 64 = 262144).

Damit kann mit sechs Ziffern im Achtersystem die Zeit ungefähr dreimal genauer angegeben werden als mit sechs Ziffern im Zehnersystem (262144 / [24 * 60 * 60] ~ 3,034). Vier Lepten oder eine halbe Okte entsprechen 1,5 Stunden und zwei Lepten entsprechen einer Schulstunde von 45 (alten) Minuten. Die Fünfminutenpause wird zur Viertelleptenpause.

Da $64_{10} = 100_8$ ist, gehen Sekunden auf natürliche Weise in Minuten über, Minuten ebenso in Lepten und Lepten in Tage. Tage können nicht auf natürliche Weise in Jahre übergehen, da ein normales Jahr $365_{10} = 555_8$ Tage hat. Das Schaltjahr mit $366_{10} = 556_8$ Tagen verbessert nichts hierbei.

Das neue analoge Uhrenzifferblatt ist viel symmetrischer aufgebaut als das alte und entspricht besser der Kompassrose und der Sonnenuhr. x und + sind als Hauptachsen überlagert. Unten steht die 0. Im Uhrzeigersinn folgen die Ziffern 1 bis 7. Die Teilung in 64 Striche (Lepten, neue Minuten und Sekunden) weicht optisch kaum von der bisherigen in 60 Striche (alte Minuten und Sekunden) ab.

Zu 3. (In der Woche wird zwischen Sonntag und Montag ein Erdtag eingeschoben.):

In mehreren Sprachen sind die Wochentage nach Planeten benannt. Die Erde ging als innerer Planet bisher leer aus. Sie wird mit dem Erdtag gewürdigt. Letztlich ist es aber weniger entscheidend, welche Bezeichnung eine Sprachgemeinschaft verwendet.

Eine Woche mit acht Tagen stellt auf den ersten Blick eine höhere menschliche Belastung dar. Der Mittwoch könnte als Mitte der Woche jedoch eine Entlastung bringen, wenn der Nachmittag sowohl bei der Arbeit als auch in der Schule möglichst frei gehalten wird.

Wir gehen von einem Acht-Stunden-Arbeitstag und zwei freien Wochenendtagen aus. Betrachten wir 56 Tage, von denen in der Sieben-Tage-Woche 320 Stunden, in der Acht-Tage-Woche 336 Stunden gearbeitet würde, so ergibt sich für den Mittwoch, dass bei gleicher Arbeitszeit 16/7 Stunden pro Acht-Tage-Woche weniger gearbeitet werden müsste.

Begännen wir unsere Arbeit in GMT um 7 Uhr, so würden wir bis 15:30 Uhr an einem Acht-Stunden-Arbeitstag arbeiten, wenn wir von einer halben Stunde Mittagspause ausgehen. An einem Mittwoch bräuchte bei gleicher Beginnzeit nur bis ca. 12:43 Uhr gearbeitet werden.

Es steht einem frei, bei gleitender Arbeitszeit die Woche über länger zu arbeiten, um beispielsweise am Freitag seine Arbeit früher beenden zu können. Bei anderen Arbeitszeitmodellen und Arbeitszeiten sind entsprechend modifizierte Lösungen anzuwenden.

Zu 4. (Die Monate haben regulär vier Acht-Tage-Wochen.):

Mit 32 Tagen können die Monate sehr gut in Zweierschritten halbiert werden. Aus der dreistelligen Tagesangabe lässt sich im Achtersystem der Monat ermitteln - gegebenenfalls sind links Nullen zu ergänzen. 0 - 3 an der zweiten Stelle kennzeichnet ungerade, 4 - 7 gerade Monate.

Monat ist allerdings nur ein Übergangsbegriff und schließlich von Mond abgeleitet ist, welcher in der neuen Zeitrechnung untergeordnete Bedeutung hat. Es werden stattdessen die Begriffe Hälfte, Drittel, Viertel, Sechstel und Zwölftel (des Jahres) verwendet. Das Datum soll möglichst auf Woche oder Tag genau angegeben werden.

Zu 5. (Der letzte zwölfte Monat hat abweichend 13 Tage (im Schaltjahr 14).):

Die Position des Schalttages mitten im Jahr war bisher wenig einleuchtend. Am Ende des Jahres kann die Zeitrechnung sinnvoll korrigiert werden, indem fehlende Zeiteinheiten eingefügt werden - insbesondere in Sekunden. Zu Neujahr werden dann alle Uhren auf [Jahr],0.000000 zurückgesetzt. Dies kommt auch Bereichen zugute, bei denen es auf besondere Genauigkeit ankommt.

Die letzten fünf (im Schaltjahr sechs) Tage können eigene Wochentagsnamen erhalten. Die Wochentagsnamen werden vermutlich aber in ihrer Bedeutung zugunsten der mit ihnen verbundenen Ziffern abnehmen.

Zu 6. (Tag 0 ist Neujahr (1.1. bisher, Sonntag), Tag 1 ist Arbeitstag (Erdtag).):

Den Sonntag auf den Monatsbeginn fallen zu lassen, hat praktische Gründe. Der Wochenbeginn mit Sonntag hat historische Gründe und ist auch ein Zugeständnis an den Mondkalender. Die 0 ähnelt außerdem dem Symbol für Sonne (Sonnenkalender).

Da der Gregorianische Kalender derzeit der am meisten verbreitete Kalender ist, fällt nach ihm Neujahr auch im Oktalkalender auf den 1.1. Die Feiern um die Jahreswende sollen in bewährter Form begangen werden können.

Zu 7. (Das Jahr der Einführung ist das Jahr 0.):

Dies geschieht aus praktischen Gründen: Das Jahr kann (ohne Zusatz) kurz notiert werden. Es wird ein deutlicher Schnitt zur alten Zeitrechnung gemacht. Von allen Punkten ist dieser der am wenigsten verbindliche.

Zu 8. (Zeitzonen entfallen und es gilt weltweit Greenwich-Zeit.):

Die Frage, welche Uhrzeit in einer anderen Zeitzone gilt, erübrigt sich. Eine weltweite Verständigung wird erleichtert, da alle Uhren auf der Erde dieselbe Zeit anzeigen, wenn sie synchronisiert werden. Greenwich ist durch den Nullmeridian historisch ausgezeichnet.

Es wird nun statt der drei Ausgangsfragen die wesentlich schwierigere gestellt:

Wie viele Tage liegen zwischen dem 25.01.2004 09:12:06 Uhr und dem 11.11.2004 11:11:11 Uhr?

Zunächst wird die Frage im Achtersystem umformuliert (mit Rundung bei den Sekunden, chr. steht für christlich):

Wie viele Tage liegen zwischen 3724,30.304233 chr. und 3724,473.356511 chr.?

Die Antwort liefert eine einfache Subtraktion: 443.052256. Der 25.01.2004 wäre in der neuen Zeitrechung ein Sonntag, der 11.11.2004 ein Dienstag. Zwischen den beiden Zeitangaben liegen genau 443052256 (neue) Sekunden, gerundet 4430523 (neue) Minuten, 44305 Lepten, 4431 Okten, 443 Tage und 44 Wochen.

Diskussion wichtiger Punkte:

Die größte Herausforderung dürfte - unabhängig von der Zeitrechnung - in der Umstellung auf das Achtersystem liegen. Sie ist mit hohen Kosten, großem Diskussionsbedarf und jahrelanger Vorbereitung verbunden. Die Politik wird unter umfangreichen Werbemaßnahmen eine harte Überzeugungsarbeit leisten müssen.

Ein Tag mehr pro Woche betrifft alle Religionsgemeinschaften gleich (gerecht). Gegenüber anderen Wochenlängen ist die Ergänzung um einen Tag sicher die maßvollste. Die Jahresangabe ist nicht religiös begründet. Durch den Zusatz kann jede Religionsgemeinschaft ihre Jahresrechnung kennzeichnen.

Ich zweifle nicht an der Lernfähigkeit des Menschen. Auch der Umgang mit Computern wurde bisher erfolgreich bewältigt. Die Kluft zwischen Mensch und Computer wird durch Einführung des Achtersystems stark verringert.

Auf den Monat bezogene Geldbeträge können auf Woche und Tag umgerechnet werden. Dies hilft bei der Umrechnung auf den verkürzten zwölften Monat. Die im Normalfall gleiche Monatslänge ist hinsichtlich des Geldes gerechter als die bisher unregelmäßige.

Jeder hat erkennbar jedes Jahr am gleichen Wochentag Geburtstag - von den an einem Schalttag Geborenen abgesehen. Dies ist kein entscheidender Nachteil. Der emotionale Rhythmus von 28 Tagen im Biorhythmus wird außerdem besser durchmischt.

Die SI-Einheit Sekunde müsste neu definiert werden. Atomuhren sollten hiermit kein Problem haben. Die Einführung des Achtersystems erfordert die Ersetzung von Begriffen wie Kilo und Million bzw. die Bedeutungsverschiebung von Wortanfängen wie Mega-, Mikro- und Nano-.

Je nach alter Zeitzone gestaltet sich der Tag bezogen auf die Uhrzeit anders. Wie gewohnt können die Menschen den Tag beginnen, essen, arbeiten oder lernen, sich treffen und schlafen. Lediglich die angezeigte Uhrzeit ist eine andere.

Dies ist gewöhnungsbedürftig, auch was die Datumsgrenze angeht. Sie bleibt aber an ihrer alten Stelle. Der weltweiten Kommunikation ist wegen ihrer zunehmenden Bedeutung Vorrang zu geben. Die entstehenden Kosten werden über die Jahre durch die gesparten übertroffen. Kalkulation und Kommunikation werden deutlich einfacher.

Mit der Einführung des Achtersystems ist es allein nicht getan. Sie sollte sinnvoll mit einer weltweiten Primärsprache (als Muttersprache) verbunden werden, die ebenfalls auf dem Achtersystem beruht. Eine solche leistungsfähige Plansprache findet sich unter Linguistik. Jeder Mensch soll mit jedem anderen auf gleichem Niveau sprechen können.

© 1983-2024 by Boris Haase

Synoptischer Oktalkalender	Januar, Februar, März, April, Mai, Juni, Juli, August, September, Oktober, November, *Dezember* ***(Schalttag)***			
Wochentag	1. Woche	2. Woche	3. Woche	4. Woche
Sonntag	*0. Tag*	*10. Tag*	20. Tag	30. Tag
Erdtag	*1. Tag*	*11. Tag*	21. Tag	31. Tag
Montag	*2. Tag*	*12. Tag*	22. Tag	32. Tag
Dienstag	*3. Tag*	*13. Tag*	23. Tag	33. Tag
Mittwoch	*4. Tag*	*14. Tag*	24. Tag	34. Tag
Donnerstag	*5. Tag*	***15. Tag***	25. Tag	35. Tag
Freitag	*6. Tag*	16. Tag	26. Tag	36. Tag
Samstag	*7. Tag*	17. Tag	27. Tag	37. Tag

Ausblick: Längenrechnung im Achtersystem

Wir messen Längen bisher auf Grundlage der SI-Einheit Meter. Im Achtersystem sind geeignete Vielfache von 8 zu bilden. Wie ist die Umsetzung praktisch zu gestalten?

Statt herkömmlichen Kilometern von 1000_{10} m Länge werden Oktalkilometer von $512_{10} = 1000_8$ m Länge verwendet. Da die Zeit statt in herkömmlichen Sekunden in Oktalsekunden von Tageslänge/1000000_8 ~ $0{,}33_{10}$ s gemessen wird, folgt, dass pro herkömmlicher Sekunde ungefähr drei Oktalsekunden gezählt werden.

Auf dem Tachometer wird die Geschwindigkeit in Oktalkilometer/Lepte gemessen, wobei Lepten der 100_8. $= 64_{10}$. Teil des Tages sind. 100 Stundenkilometer entsprechen dann ungefähr $73{,}242_{10}$ ~ $111{,}2_8$ Lepten(oktal)kilometer. Der Unterschied im Zahlenwert ist also kaum abweichend und daher vertretbar. 100_8 Lepten(oktal)kilometer entsprechen umgekehrt ungefähr $87{,}38_{10}$ Stundenkilometer.

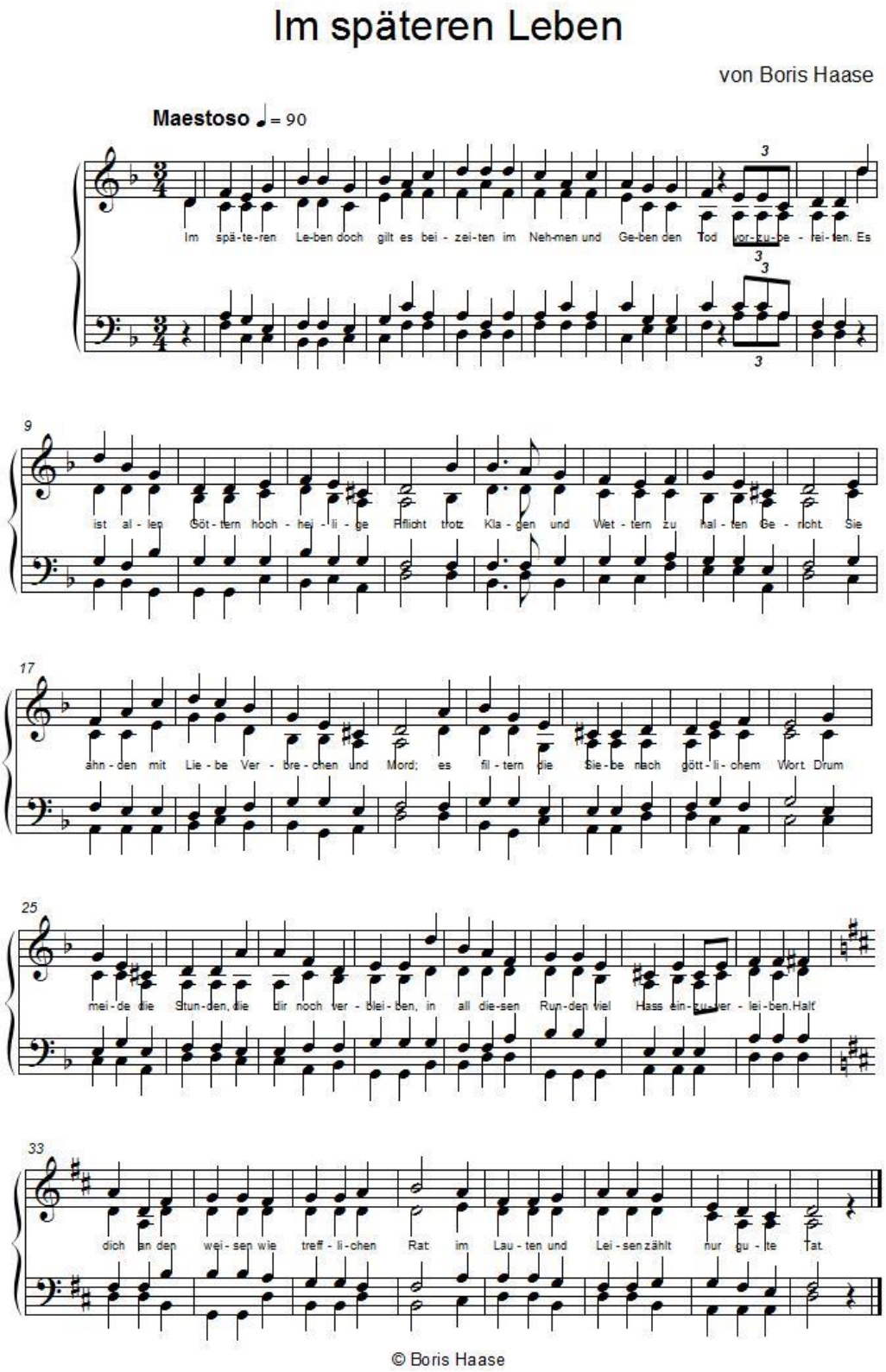
Die Lichtgeschwindigkeit beträgt 299792458_{10} m/s = $98808549{,}39_{10}$ m/Oktalsekunde ~ 570731345_8 m/Oktalsekunde. Wenn wir die Lichtgeschwindigkeit mit ca. 300000 km/s angeben, können wir sie auch mit 570000 Oktalkilometer/Oktalsekunde angeben.

Die 25_{10}-m-Schwimmbahnen werden auf $24_{10} = 30_8$ m verkürzt, die 50_{10}-m-Schwimmbahnen auf $48_{10} = 60_8$ m. Statt 50_{10} m, 100_{10} m, 200_{10} m, 400_{10} m, 800_{10} m und 1500_{10} m wären dann $48_{10} = 60_8$ m, $96_{10} = 140_8$ m, $192_{10} = 300_8$ m, $384_{10} = 600_8$ m, $768_{10} = 1400_8$ m und $1536_{10} = 3000_8$ m zu schwimmen. Auch diese Abweichungen sind vertretbar. Die Langstrecken sollten Vielfache von 1000_8 sein.

In der Leichtathletik gibt es darüber hinaus folgende Strecken: 3000_{10} m, 5000_{10} m, 10000_{10} m, 20000_{10} m und 50000_{10} m, die durch folgende Strecken abgelöst werden könnten: $3072_{10} = 6000_8$ m, $4096_{10} = 10000_8$ m, $8192_{10} = 20000_8$ m, $20480_{10} = 50000_8$ m und $49152_{10} = 140000_8$ m. Der Marathon bleibt unverändert (42,195 km = $122{,}323_8$ Oktalkilometer).

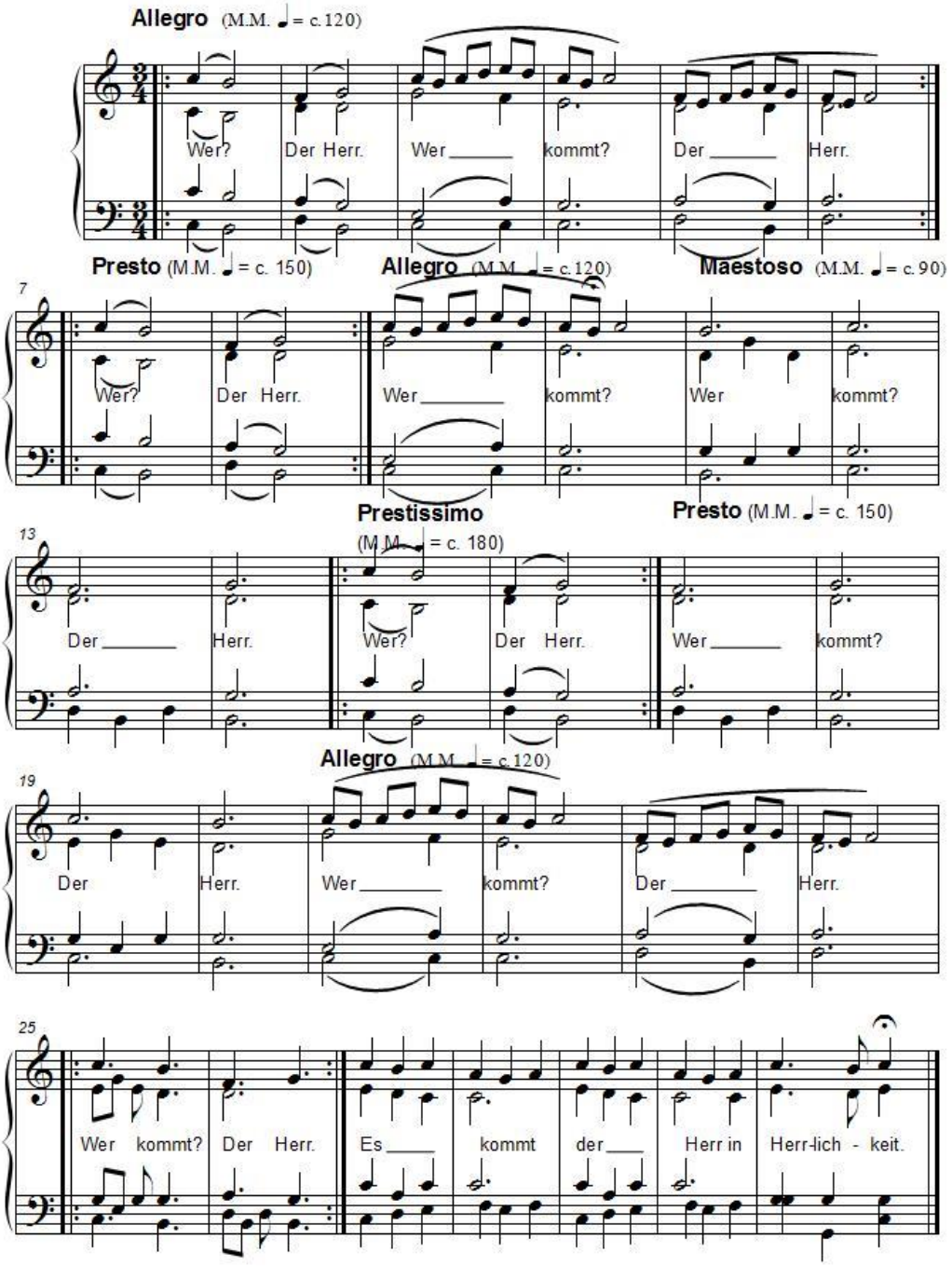
Im Bau gelten meist auf den Zentimeter genau bestimmte Maße. Da im Achtersystem auf $1/64_{10}$ bzw. $1/512_{10}$ m genau gerechnet werden kann, sollten hier keine Probleme bestehen. Ähnliches gilt für Möbel, obwohl hier sicherlich der Wechsel von Maßen als Vielfaches von 0,1 m auf Vielfache von 0,125 m akzeptiert werden kann.

Musik


Im späteren Leben
von Boris Haase
Maestoso ♩= 90
Im spä-te-ren Le-ben doch gilt es bei - zei-ten im Neh-men und Ge-ben den Tod vor-zu-be - rei-ten. Es
ist al - les Göt - tern hoch - hei - li - ge Pflicht trotz Kla - gen und Wet - tern zu hal - ten Ge - richt. Sie
ahn - den mit Lie - be Ver - bre - chen und Mord; es fil - tern die Sie - be nach gött - li - chem Wort. Drum
mei - de die Stun - den, die dir noch ver - blei - ben, in all die - sen Run - den viel Hass ein - zu - ver - lei - ben. Halt'
dich an den wei - sen wie treff - li - chen Rat: im Lau - ten und Lei - sen zählt nur gu - te Tat.
© Boris Haase

Der Herr

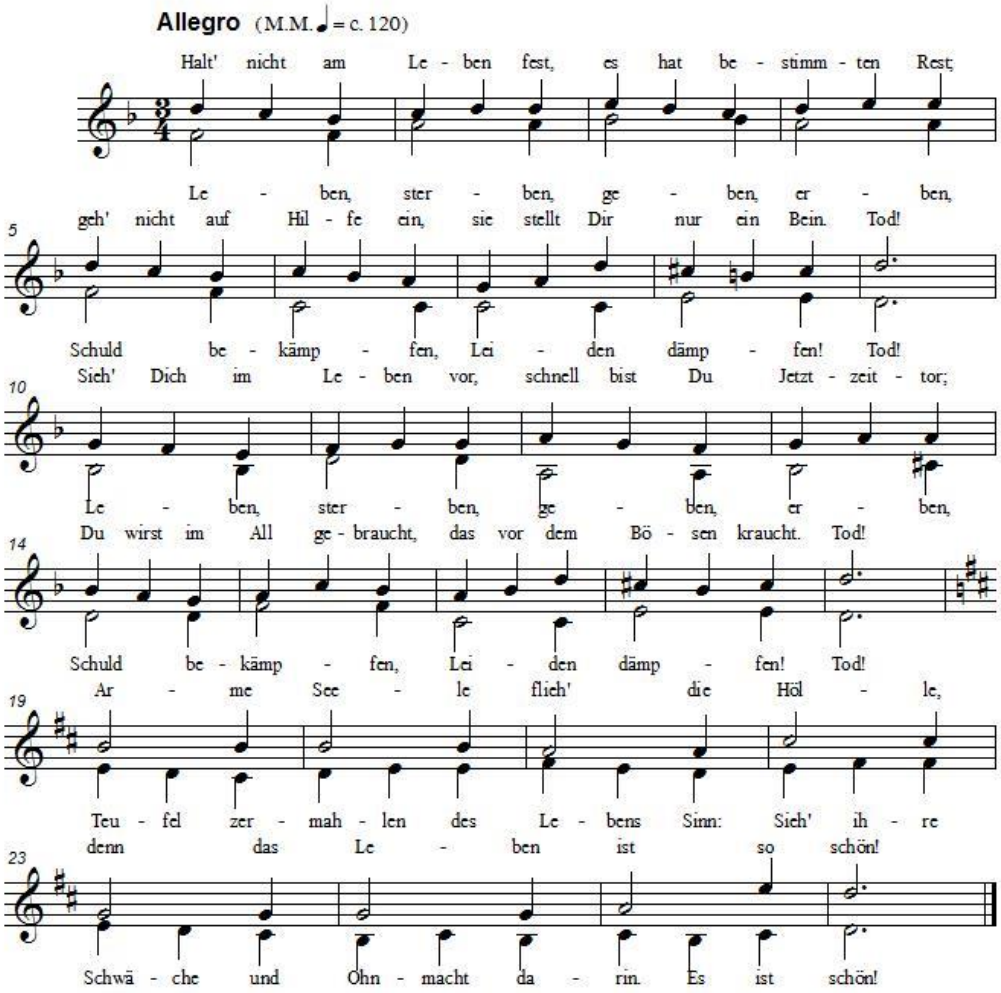
von Boris Haase



© Boris Haase

Halt' nicht am Leben fest

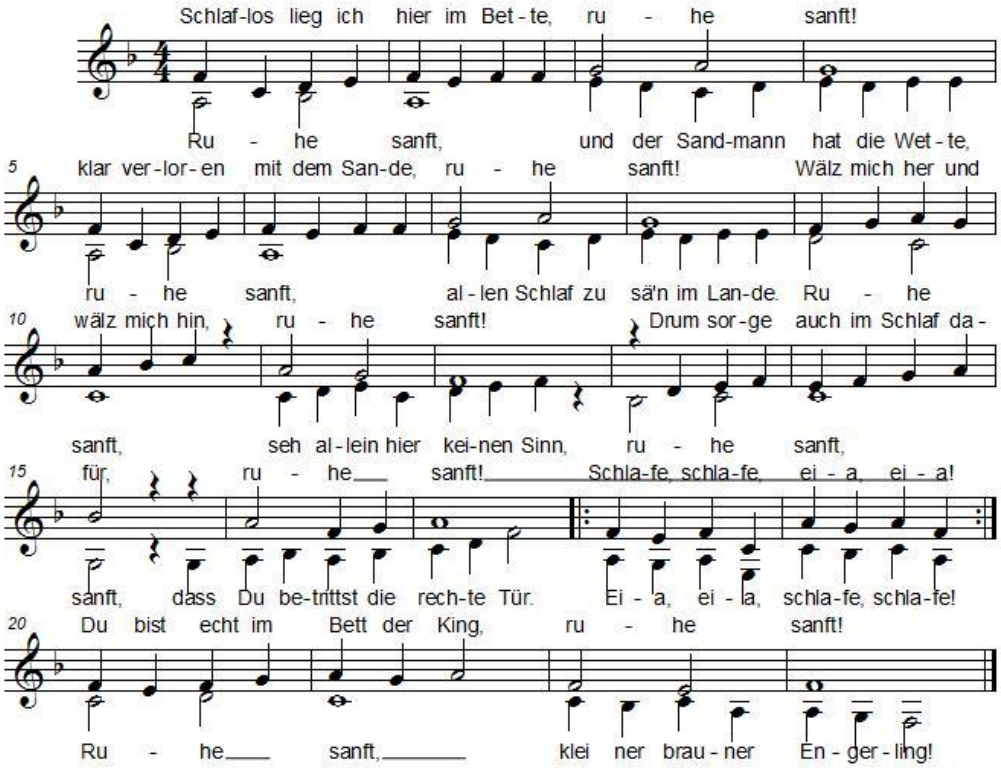
von Boris Haase



© Boris Haase

Schlaflos lieg ich hier im Bette

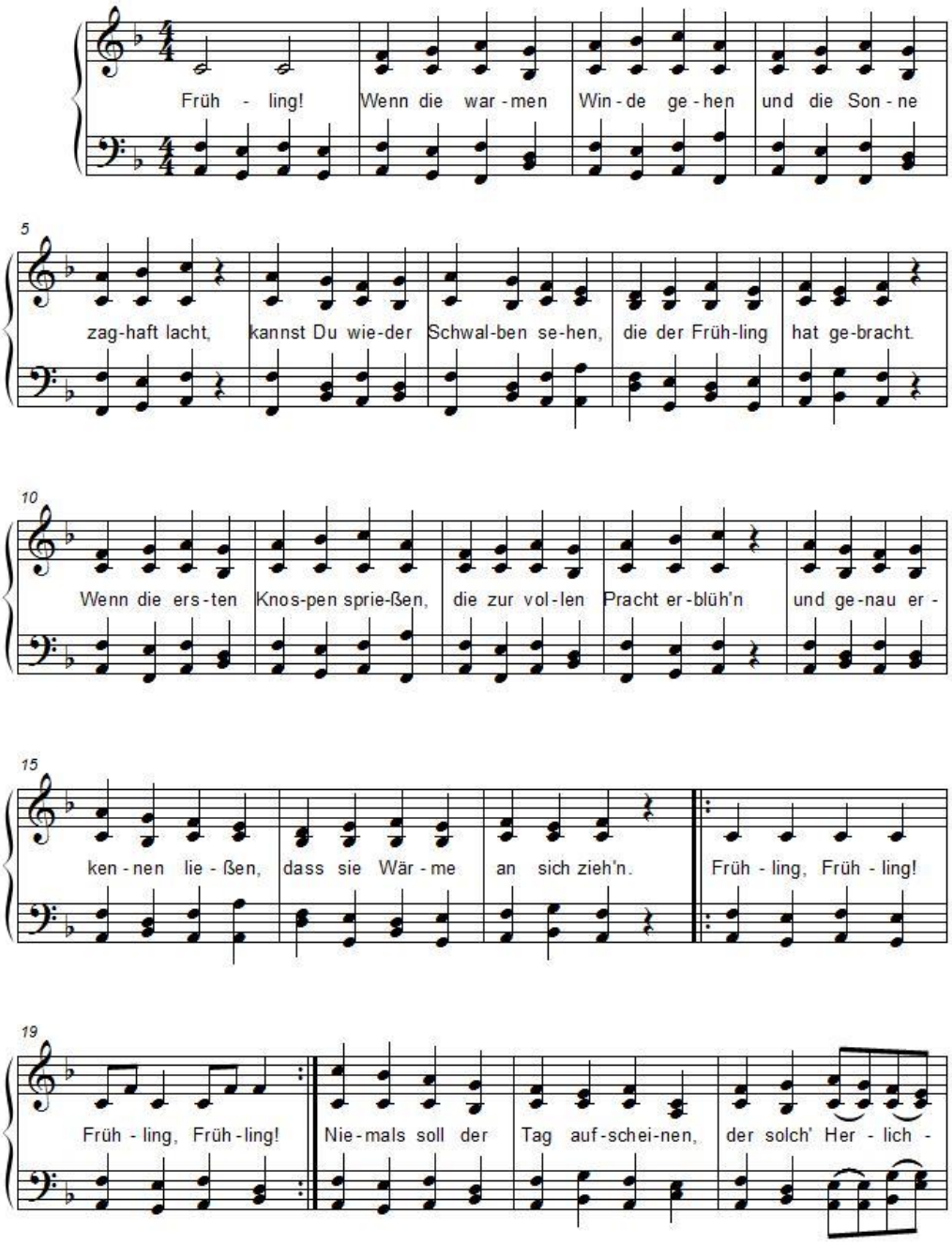
von Boris Haase



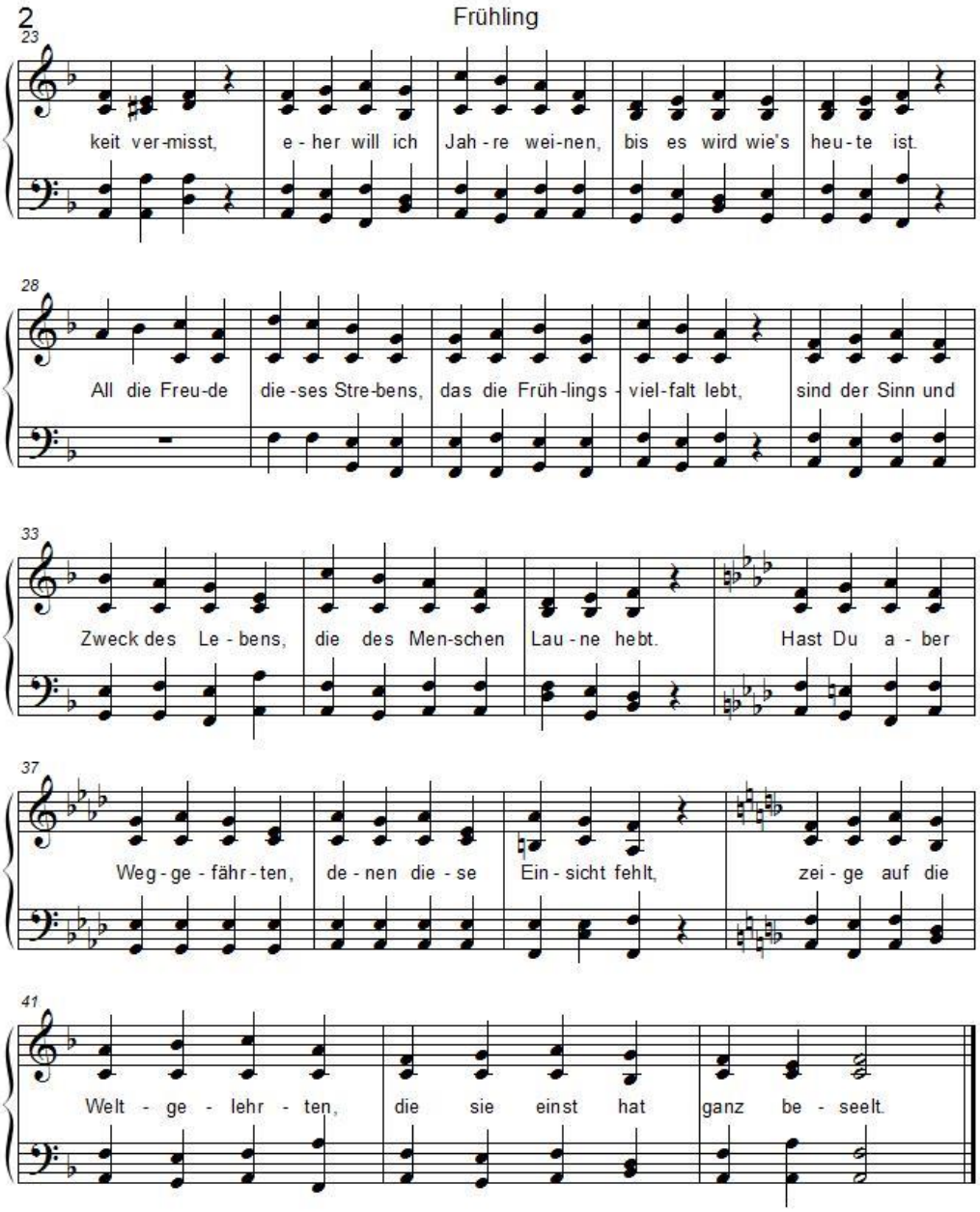
© Boris Haase

Frühling

von Boris Haase

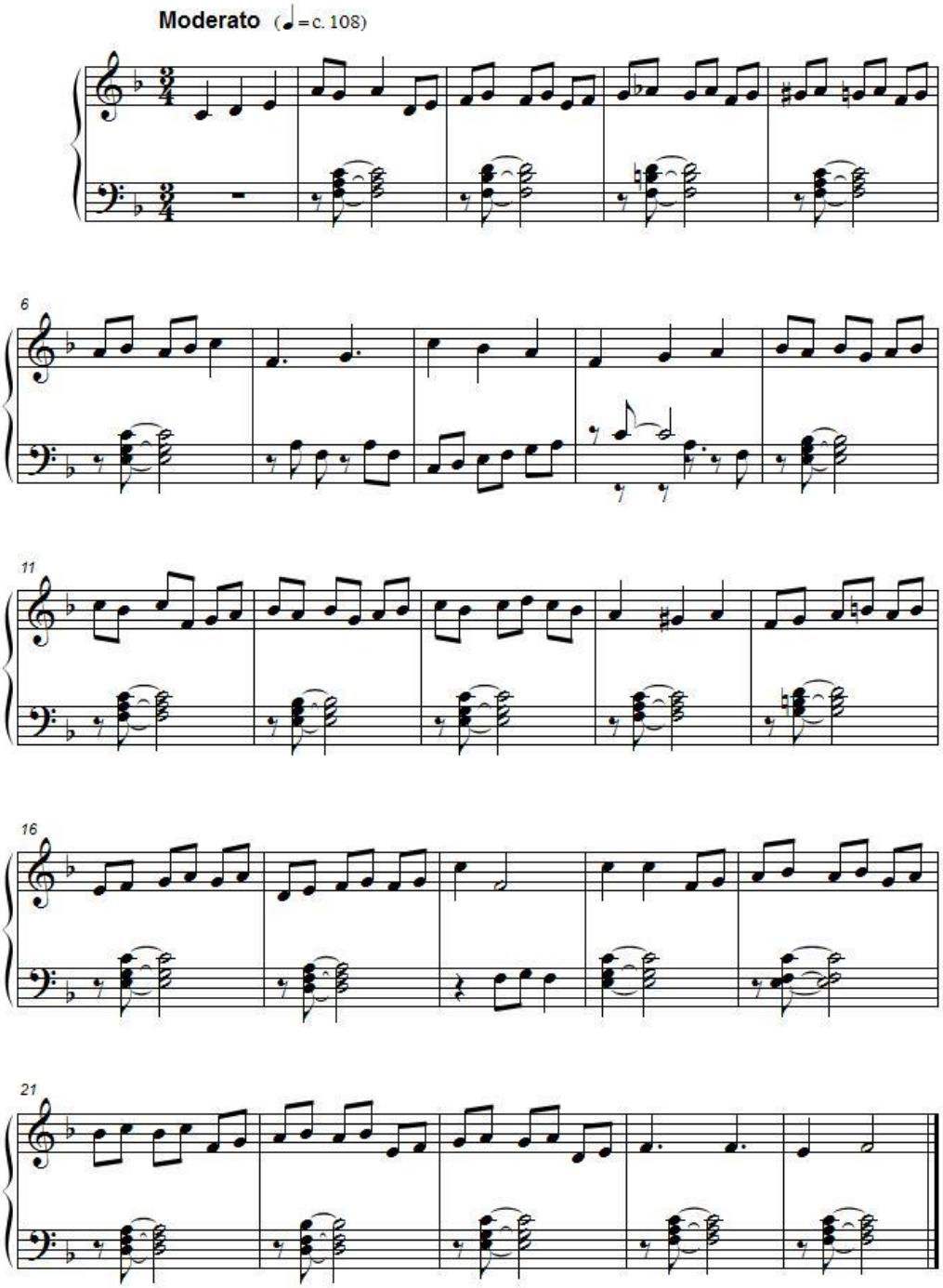


© Boris Haase


2
Frühling
23
keit ver-misst, e-her will ich Jah-re wei-nen, bis es wird wie's heu-te ist.
28
All die Freu-de die-ses Stre-bens, das die Früh-lings-viel-falt lebt, sind der Sinn und
33
Zweck des Le-bens, die des Men-schen Lau-ne hebt. Hast Du a-ber
37
Weg-ge-fähr-ten, de-nen die-se Ein-sicht fehlt, zei-ge auf die
41
Welt-ge-lehr-ten, die sie einst hat ganz be-seelt.

Ballettübung

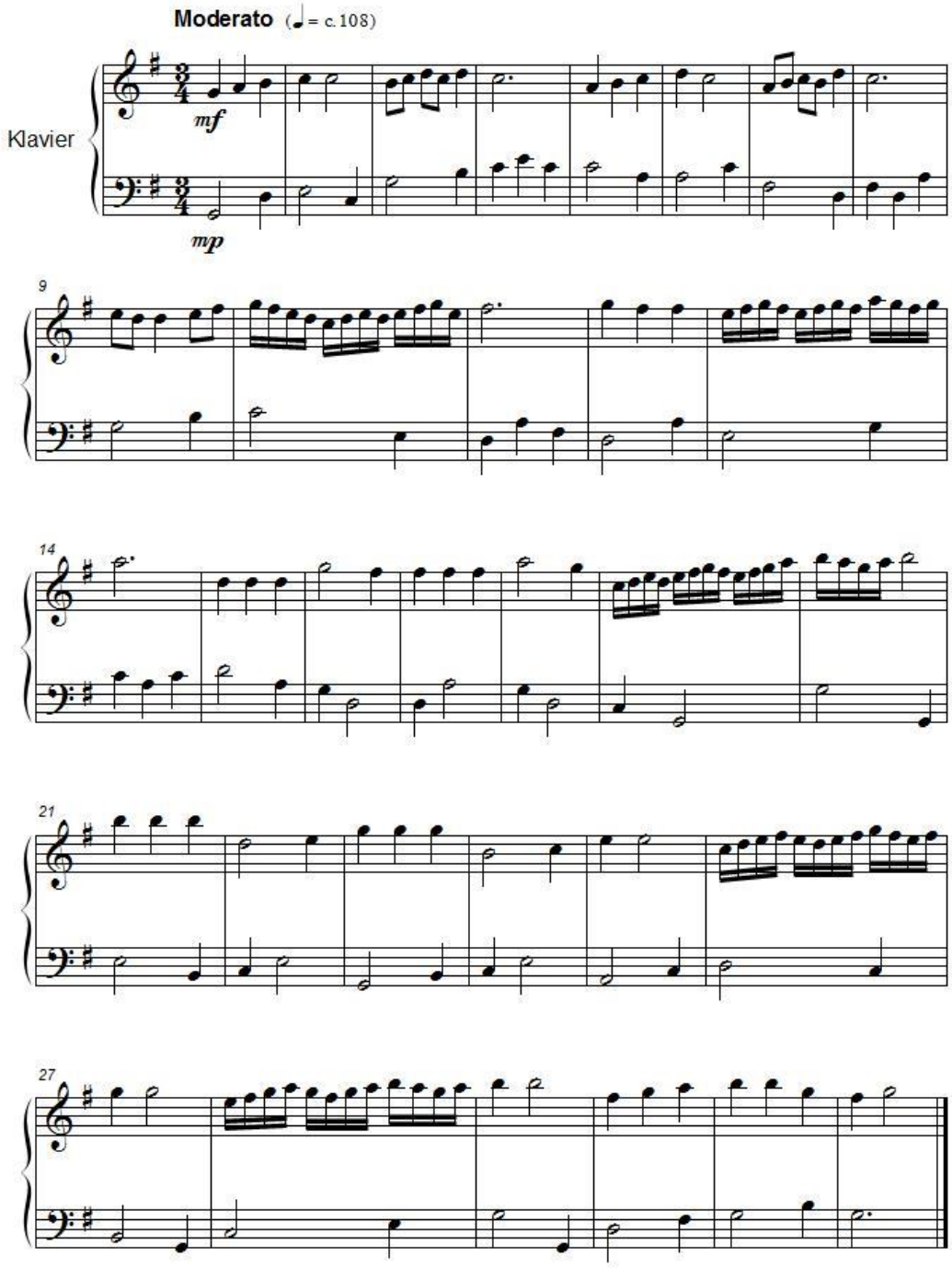
von Boris Haase



© Boris Haase

In Venedig

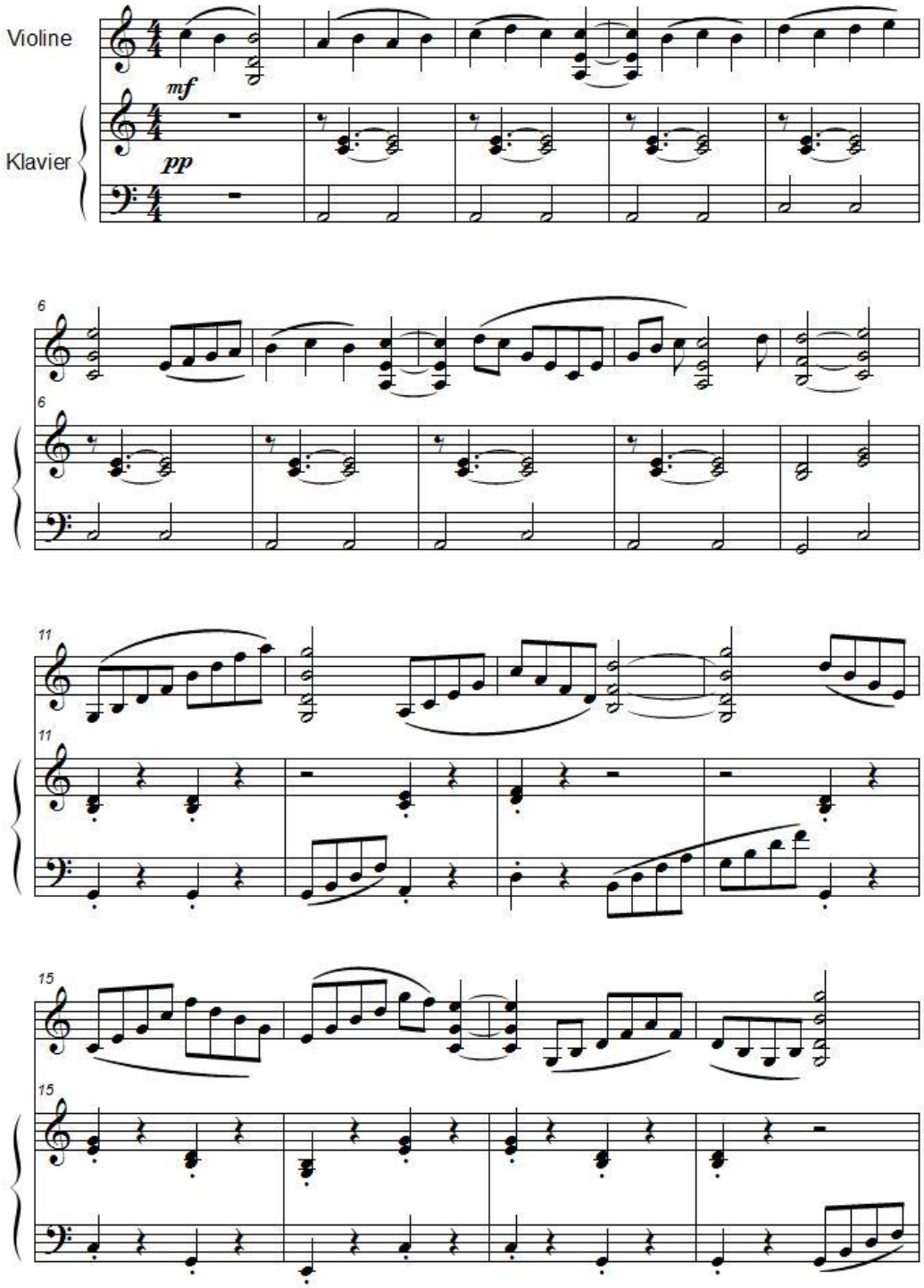
von Boris Haase



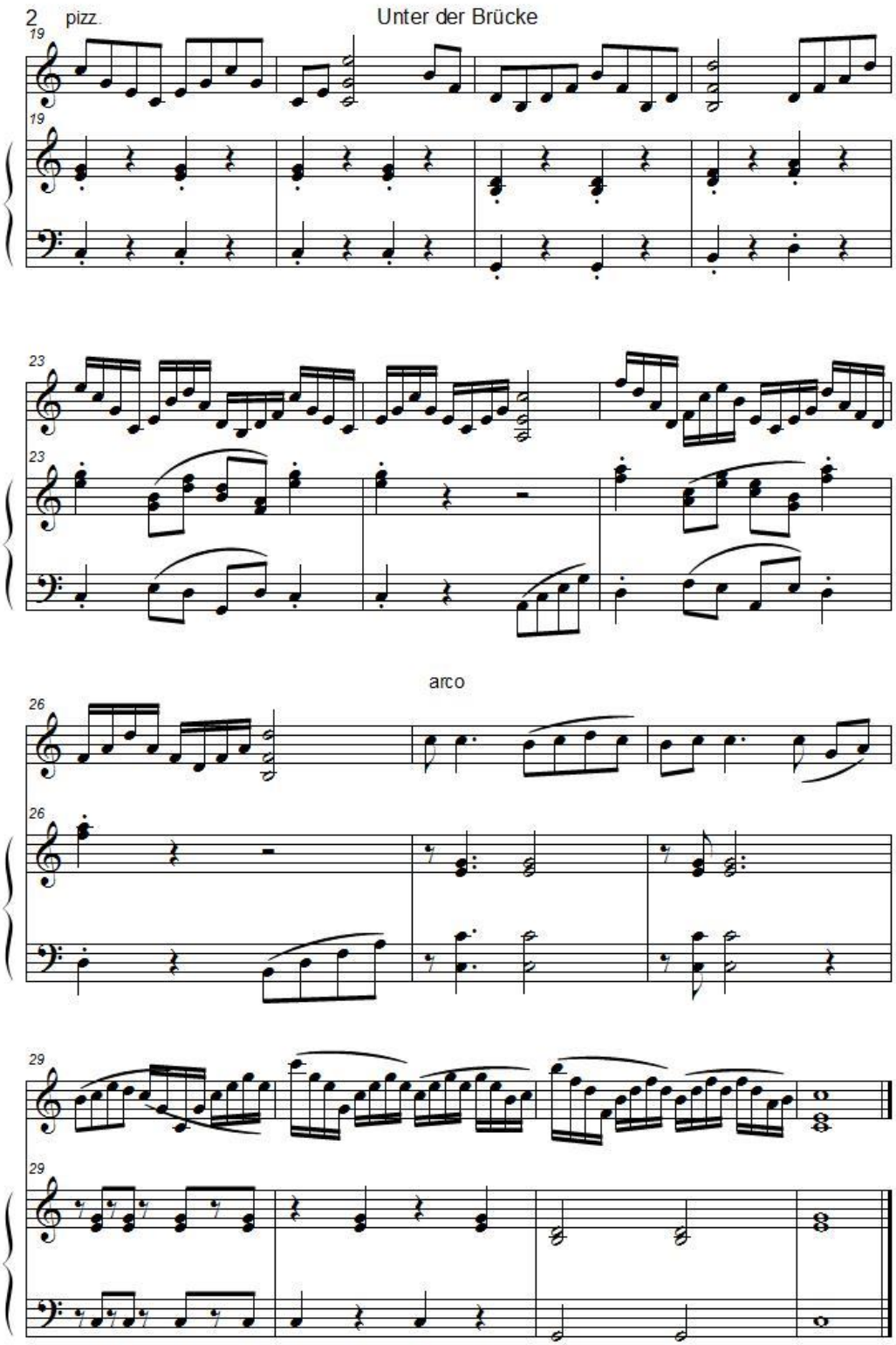
© Boris Haase

Unter der Brücke

von Boris Haase

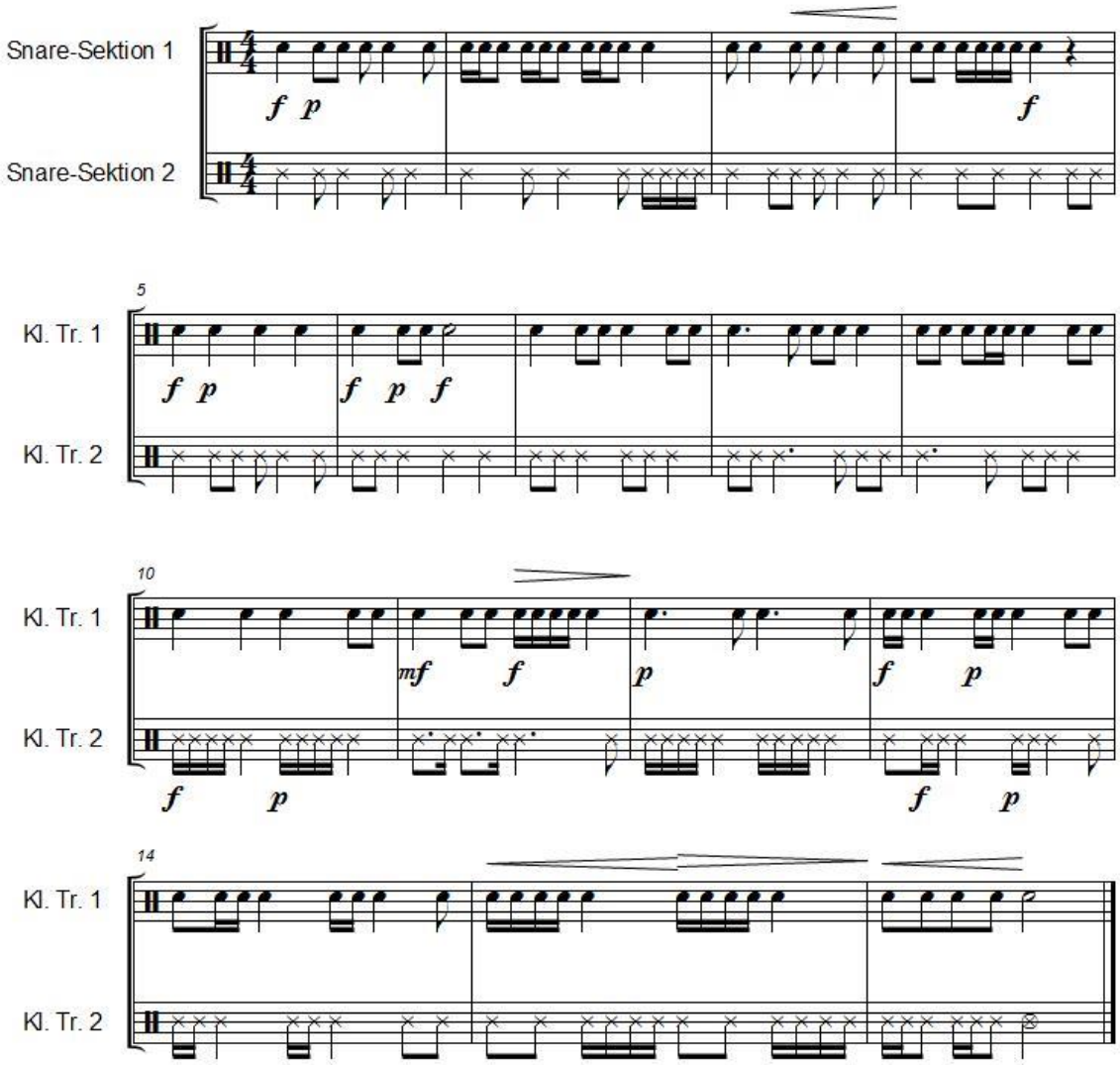


© Boris Haase


2
pizz.
Unter der Brücke
19
19
23
23
arco
26
26
29
29

Trommelhasenduett

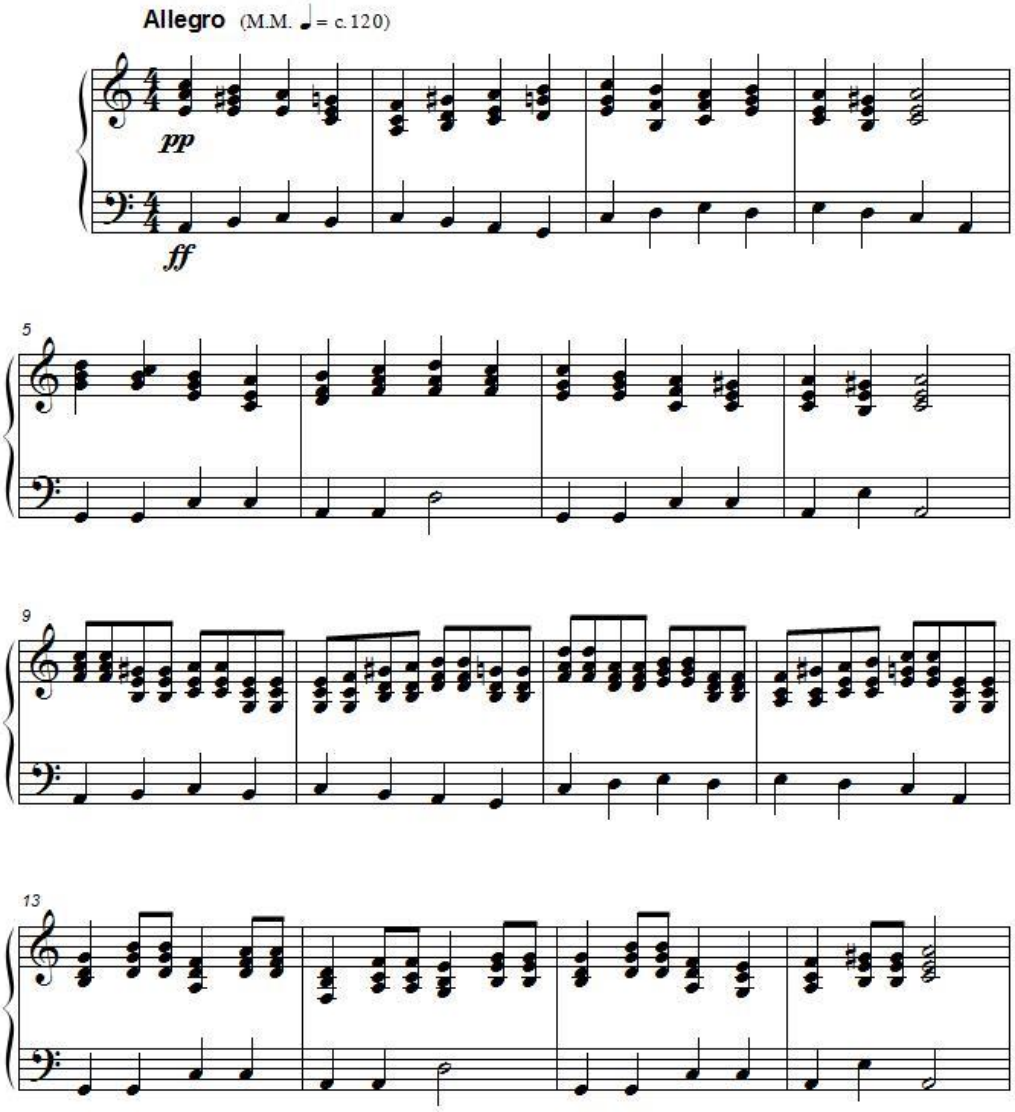
von Boris Haase



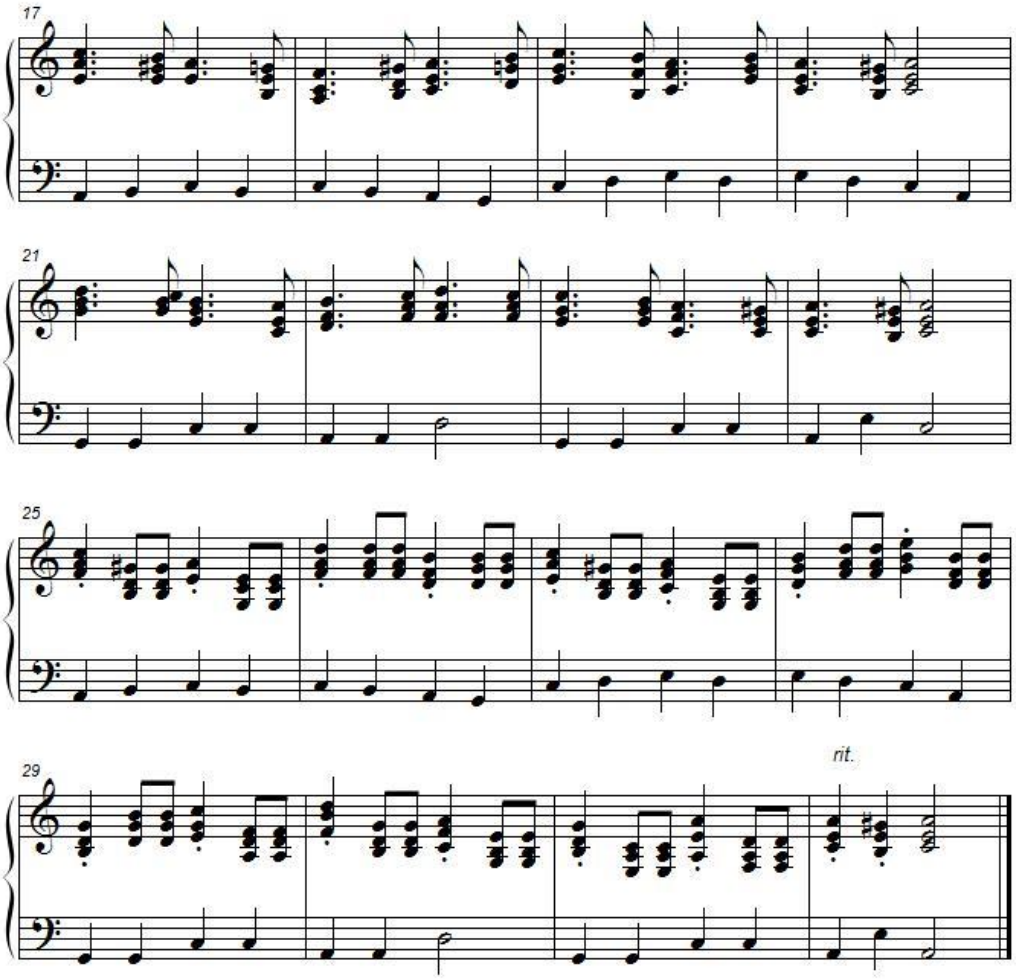
© Boris Haase

Auf dem Jahrmarkt

von Boris Haase



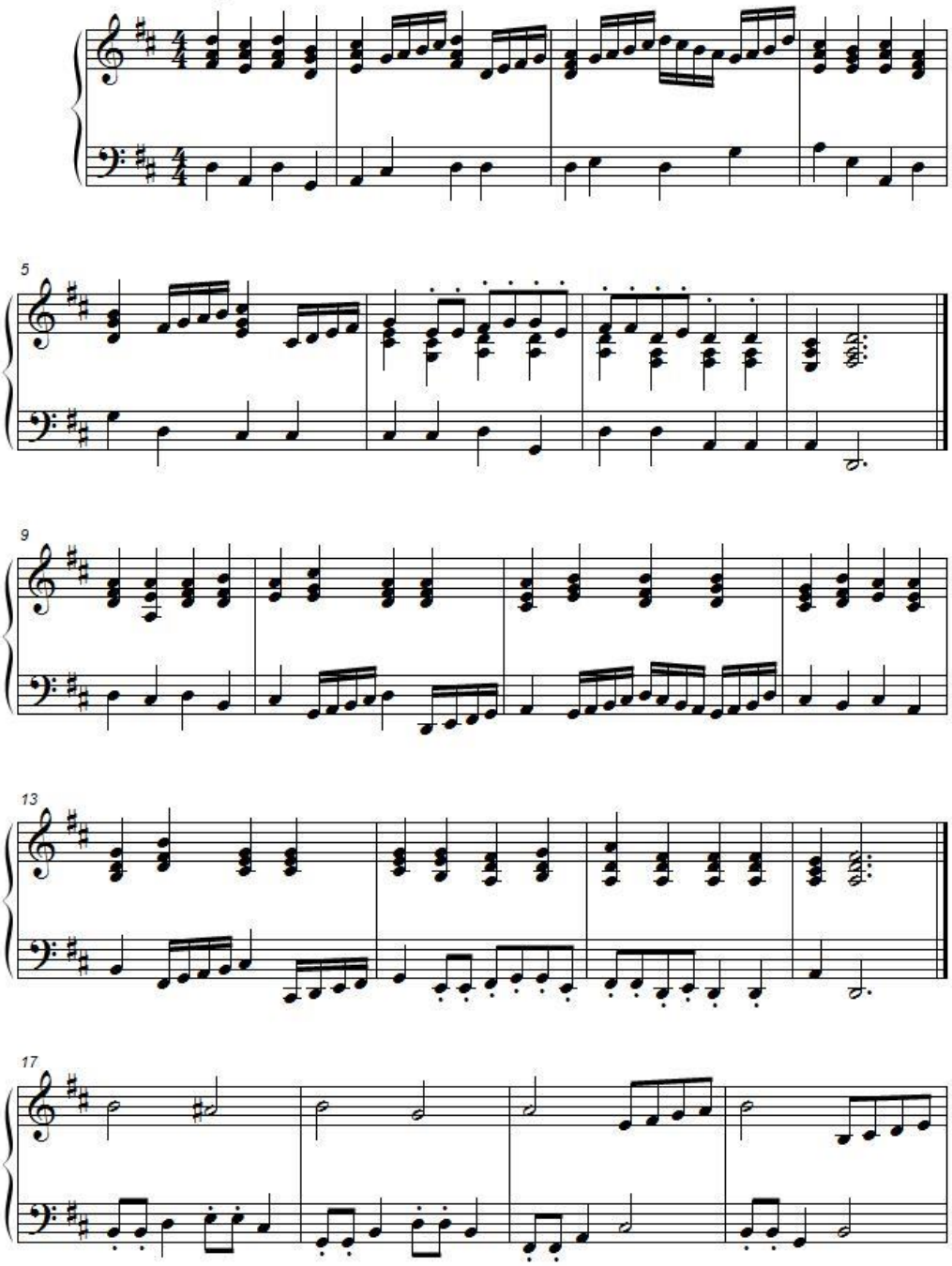
© Boris Haase


17
21
25
29
rit.

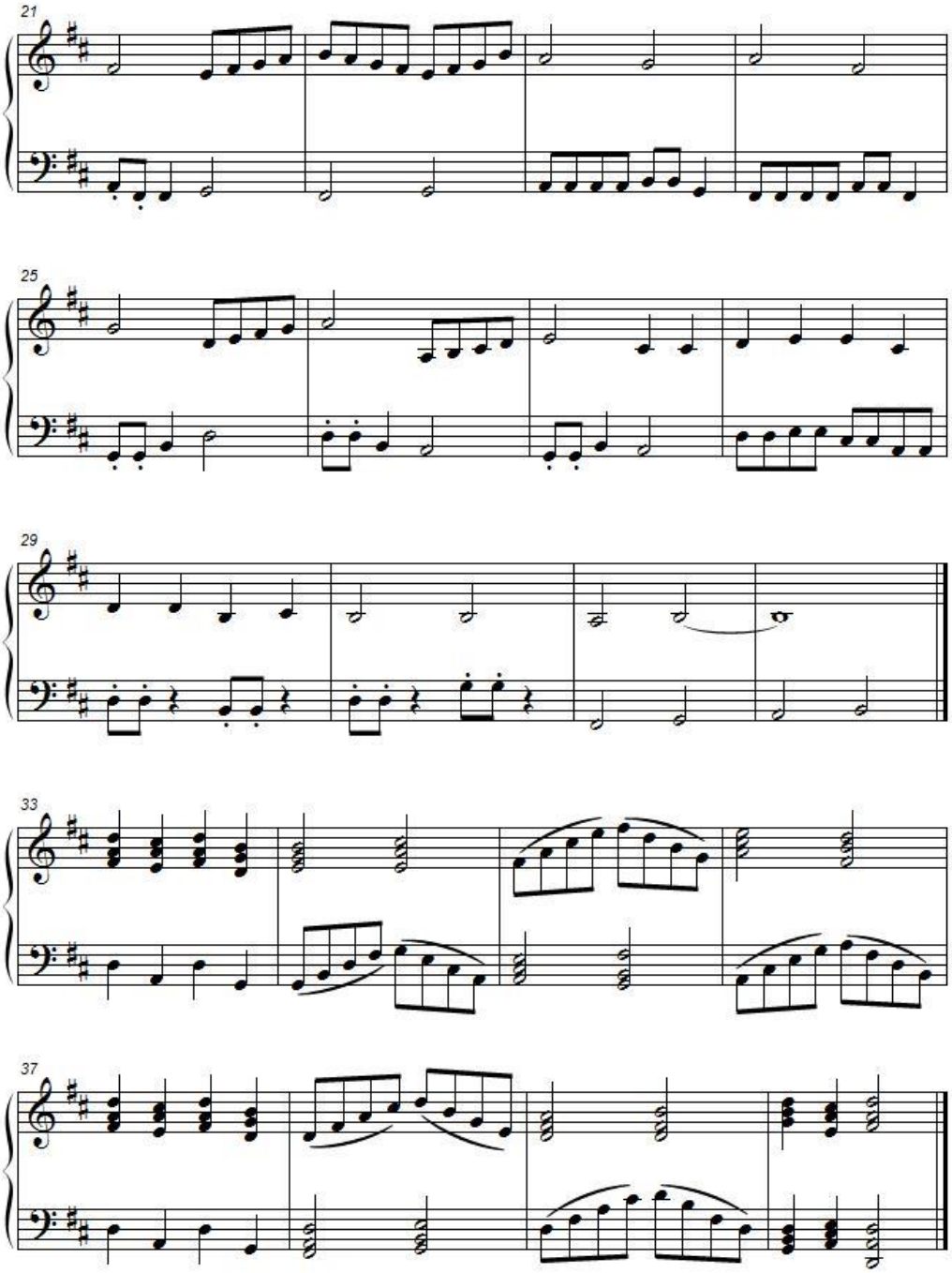
Glockenblumen

von Boris Haase

Allegro (M.M. ♩ = c. 120)

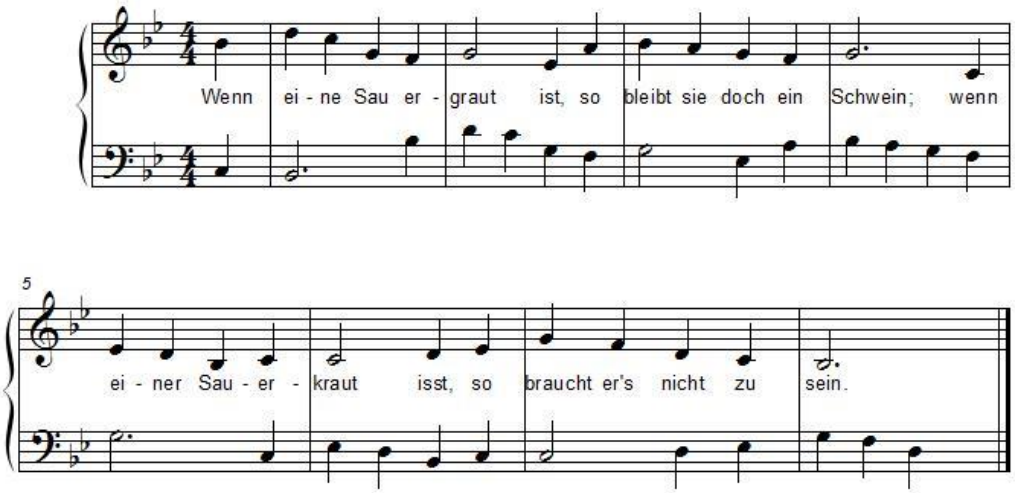


© Boris Haase


21
25
29
33
37

Die Sau

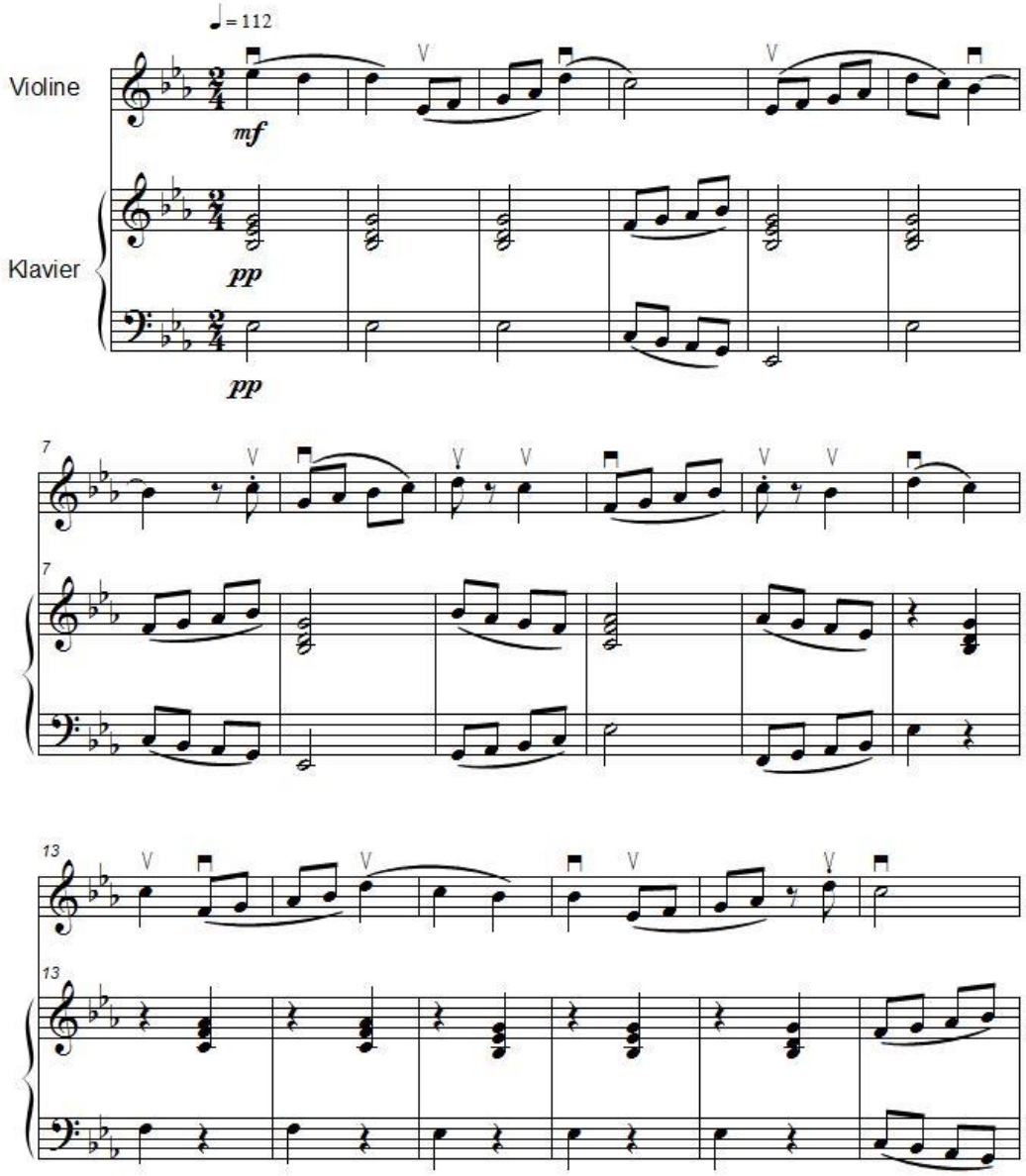
von Boris Haase



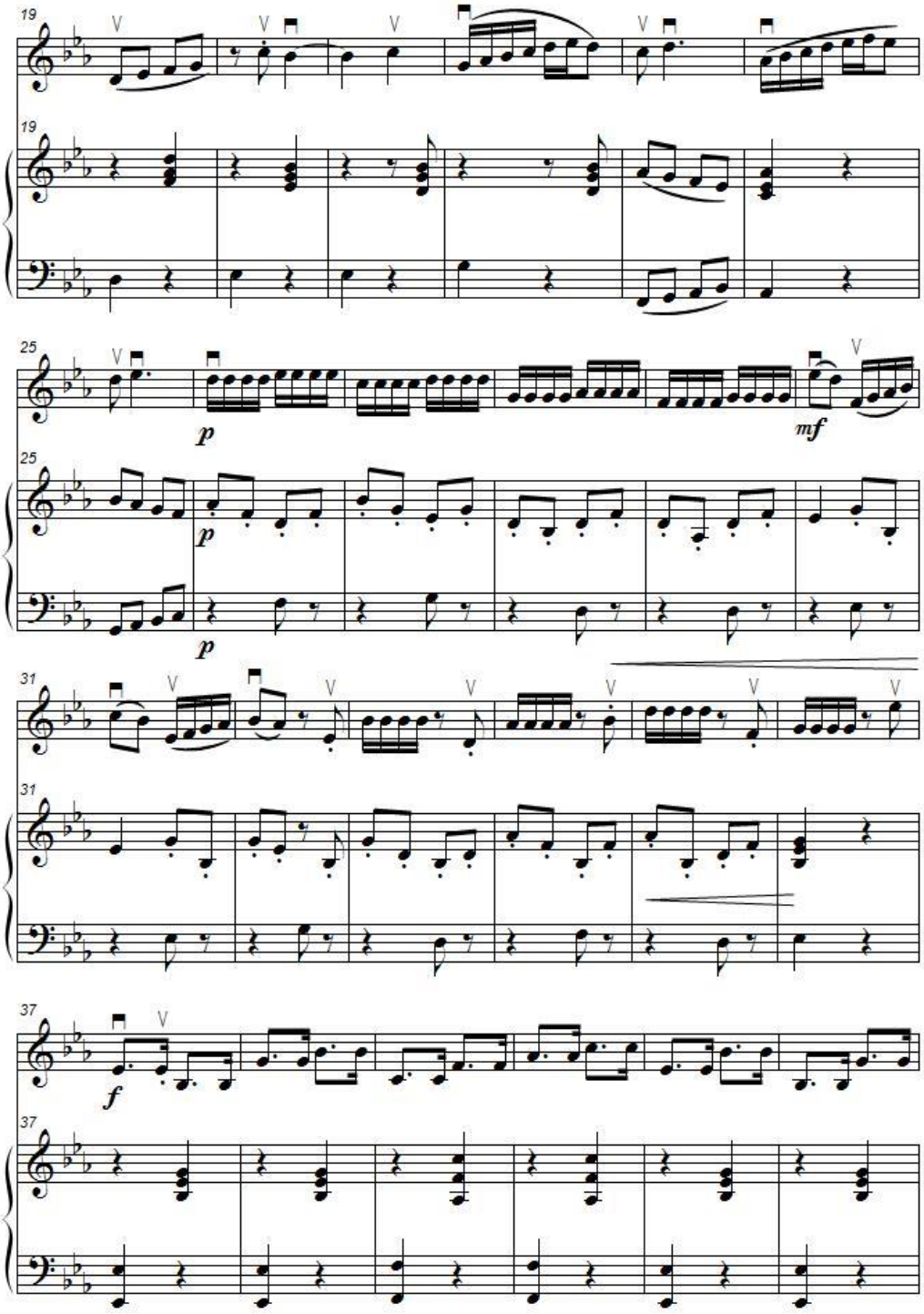
© Boris Haase

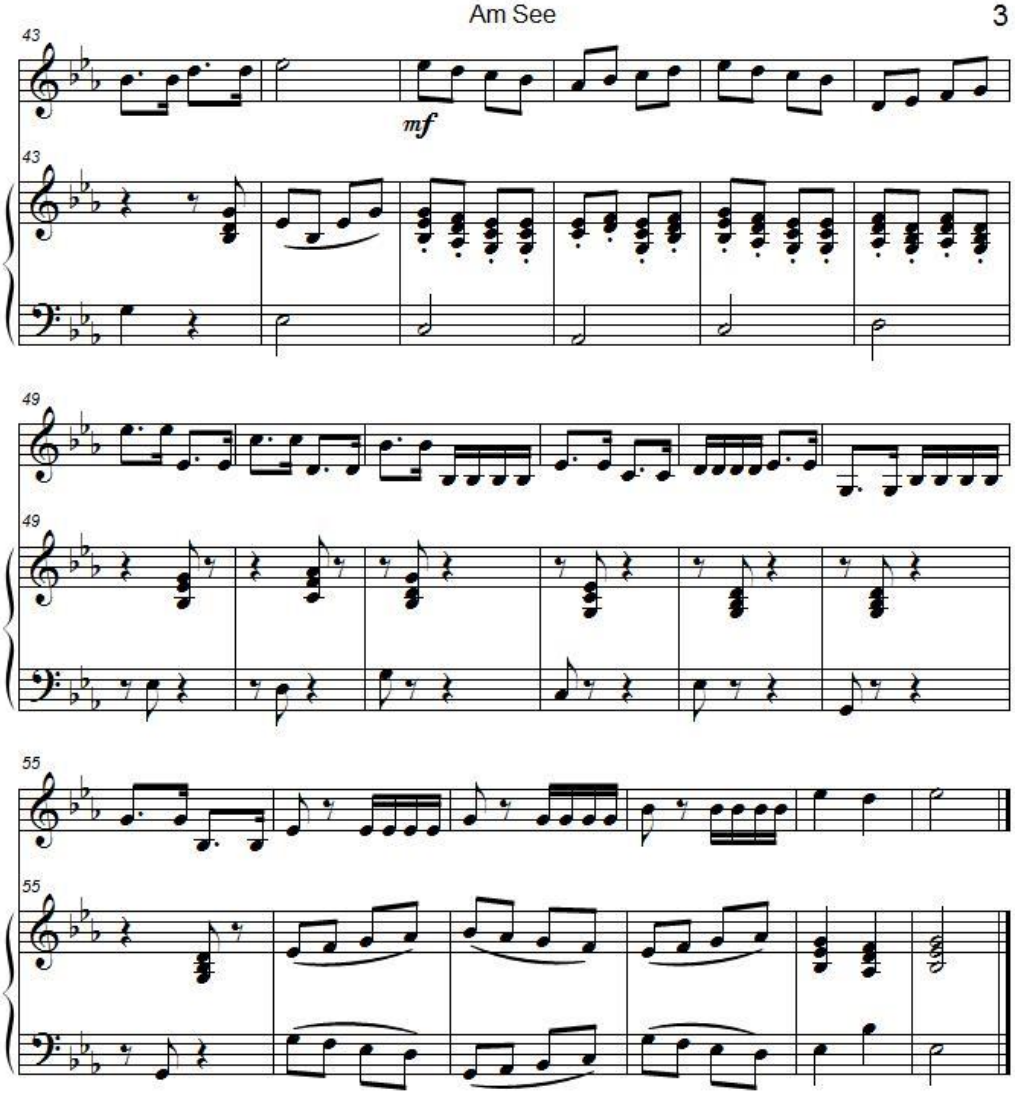
Am See

von Boris Haase



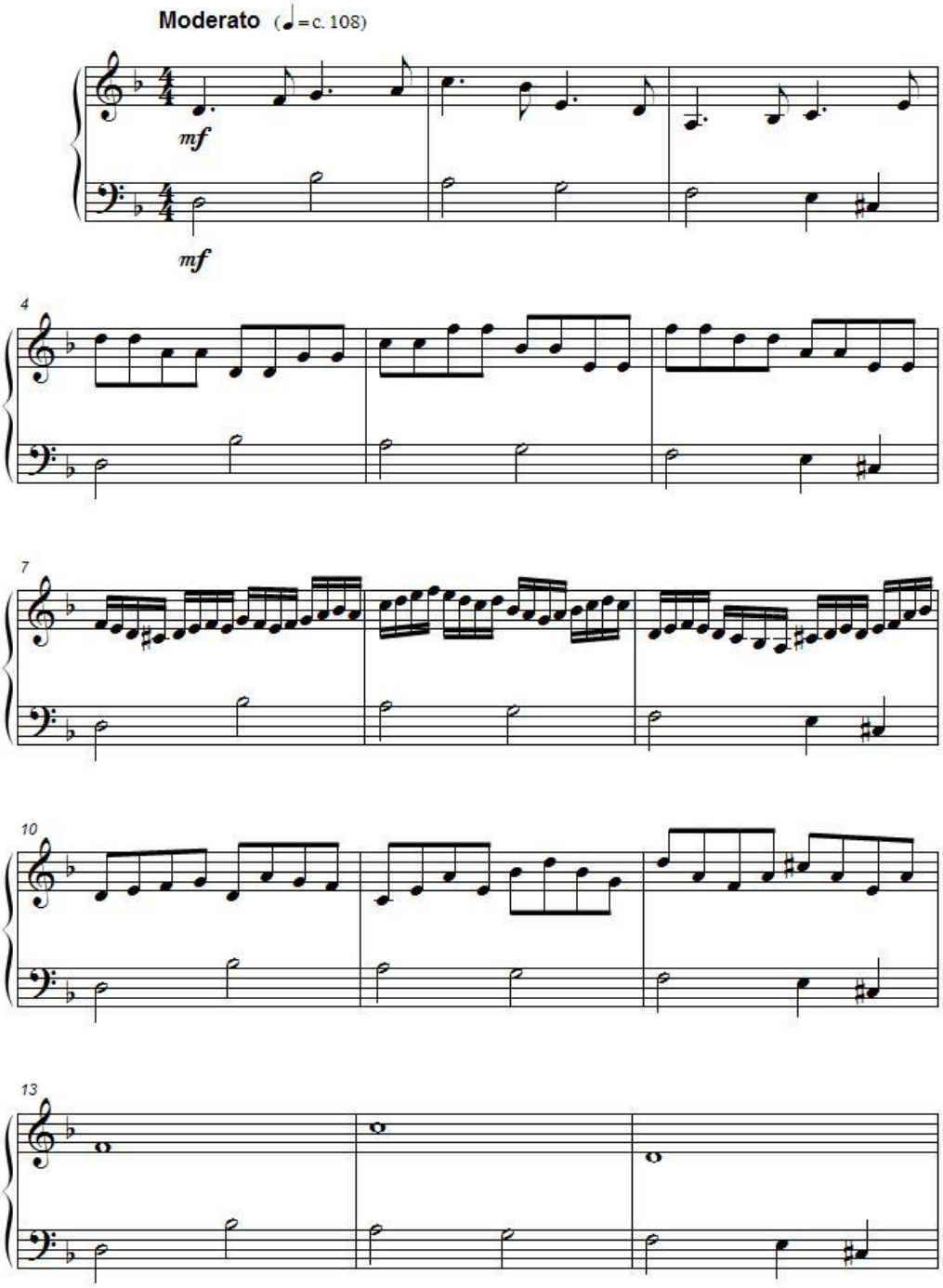
© Boris Haase


19
19
25
p
mf
25
p
p
31
31
37
f
37

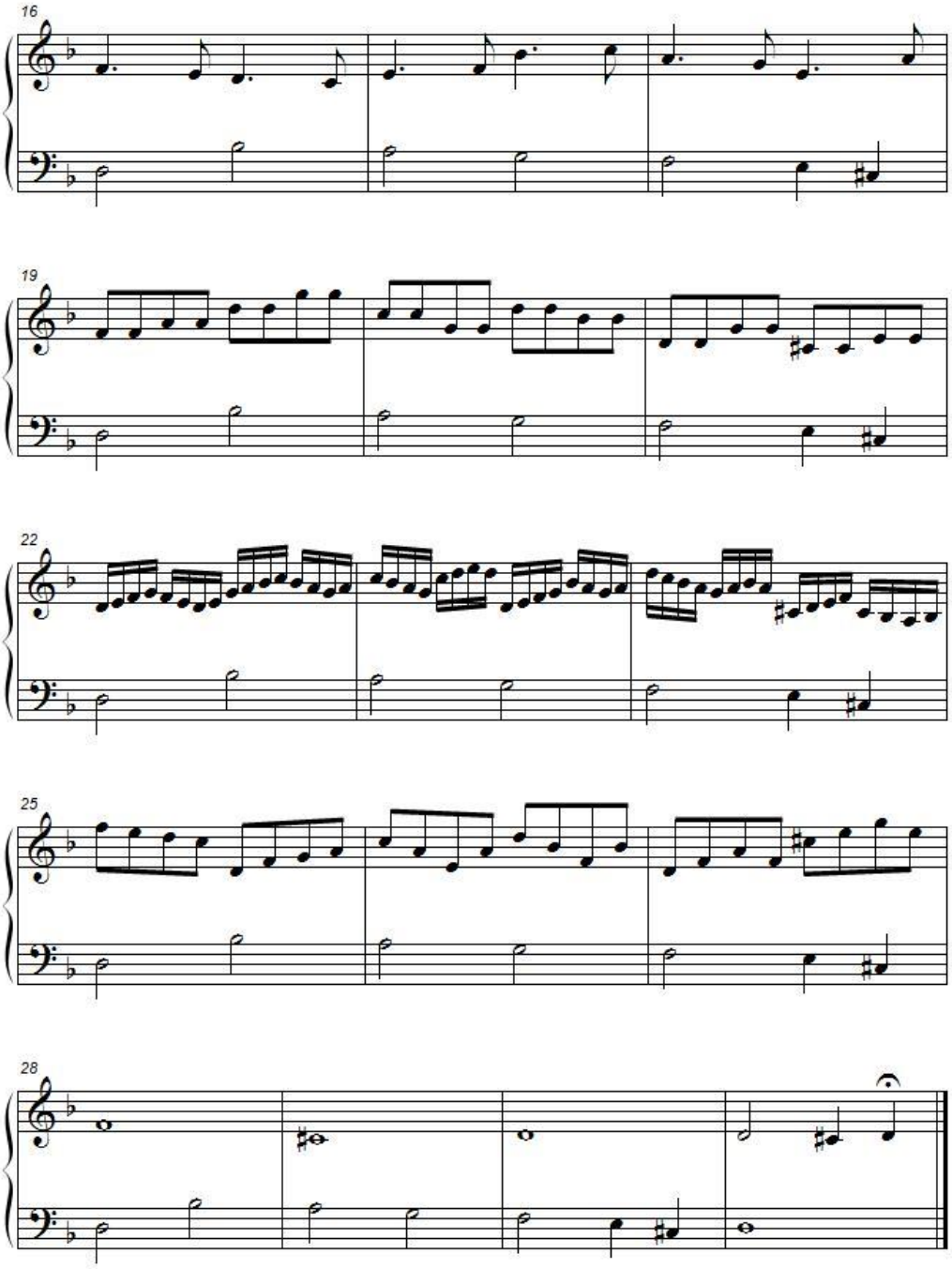

43
mf
43
49
49
55
55

Am Fluss

von Boris Haase

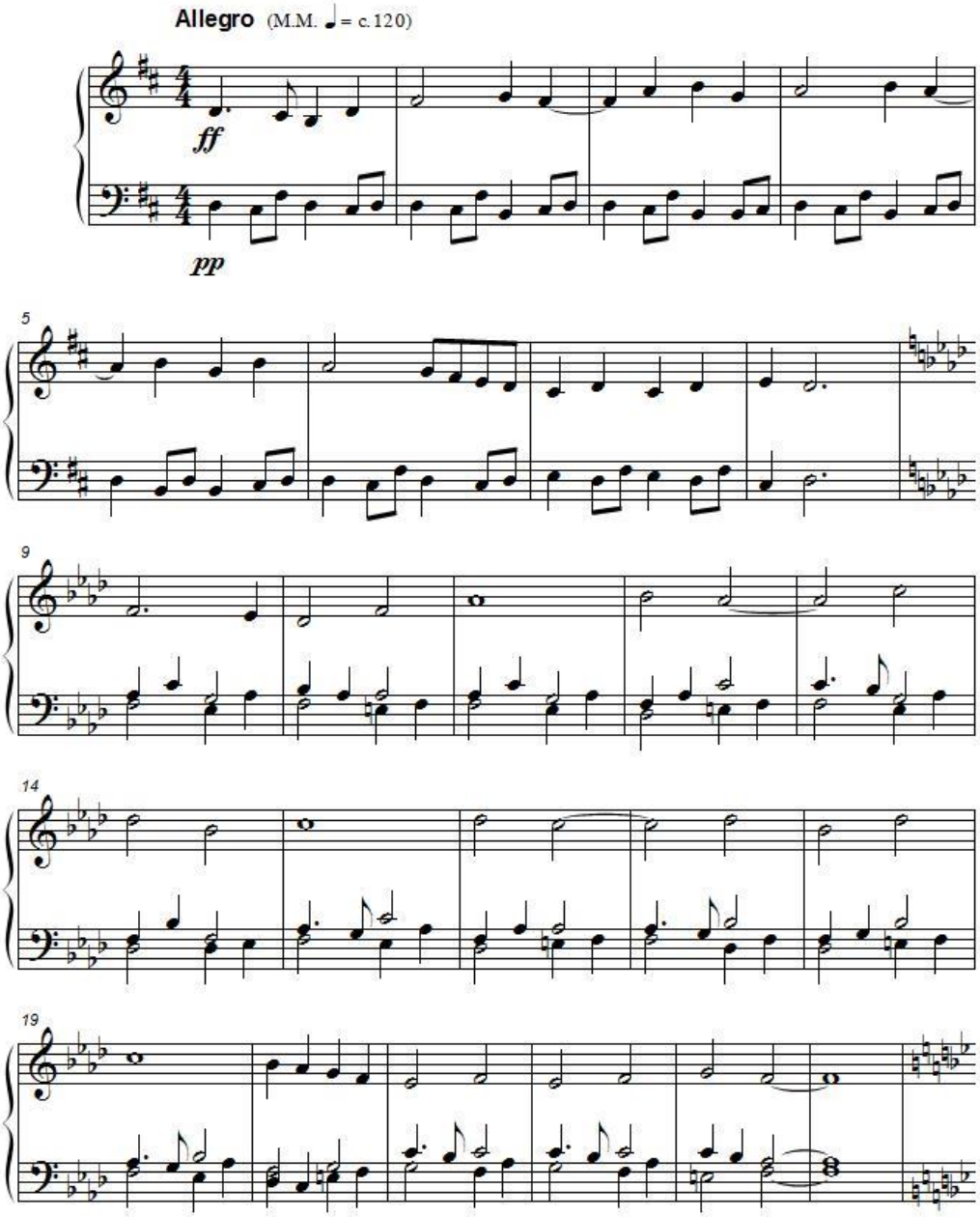


© Boris Haase


16
19
22
25
28

An der Mauer

von Boris Haase



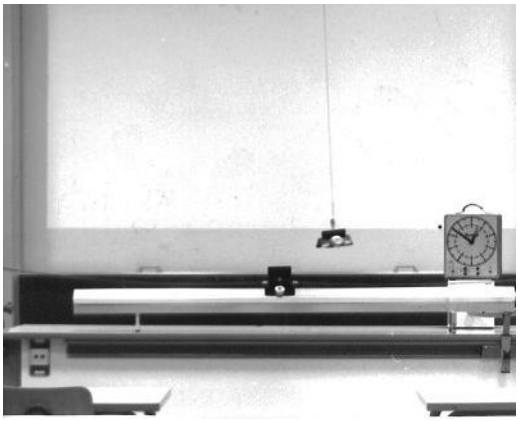
© Boris Haase

2
An der Mauer
25
29

Physik

Unter Schwingungen wird als Ergebnis von Jugend forscht 1983 eine durch Differentiation gewonnene Näherungsformel für die Periodendauer ausgewählter Schwingungen eines Massepunktes in der Ebene hergeleitet, die die exakte, aber unhandliche Integration vermeidet. Die Periodendauer für das mathematische Pendel wird experimentell überprüft. Für das Universum werden das Würfel- und das dazu isomorphe Kugelmodell vorgestellt.

Schwingungen



Jugend forscht 1983
Fachgebiet Physik

Ein neuartiges Verfahren zur Bestimmung der Periodendauer des mathematischen Pendels bei großen Amplituden und die Diskussion zur Anwendbarkeit auf andere ausgesuchte Schwingungen der Ebene

Erarbeitet von
Boris Haase (18),
Theodor-Heuss-Gymnasium zu Göttingen

Kurzfassung der vorliegenden Arbeit

Die Schwingungsdauer von Massenpunkten auf gekrümmten Schwingungsbahnen in der senkrechten Ebene - wie z. B. des mathematischen Pendels und des Zykloidenpendels - soll in der vorliegenden Arbeit auf einfachere Weise berechnet werden als bisher.

Die meisten dieser Schwingungsdauern sind bei größerer Entfernung des Massenpunktes auf der Schwingungsbahn von der Ruhelage, deren tiefstem Punkt, von dieser Entfernung abhängig, was die Berechnung im Allgemeinen erschwert.

Um eine von dieser Entfernung, der Amplitude, unabhängige Periodendauer berechnen zu können, muss man außer der Masse nur die Direktionsgröße kennen, dem Quotienten aus rücktreibender Kraft und dem dazugehörigen Auslenkungs- bzw. Direktionsweg.

Diese Kenntnis wird in dieser Arbeit auf die von ihrer Amplitude abhängigen Schwingungsdauern erweitert und angewandt.

Hierbei ergeben sich zu den herkömmlichen Methoden teilweise Differenzen - am Beispiel des mathematischen Pendels bis höchstens ein Prozent bei 90° Auslenkung -, teilweise wie am Beispiel des Zykloidenpendels jedoch nicht. Zum ebenfalls bearbeiteten Ellipsenpendel konnten keine Literatur-Angaben gefunden werden.

Im experimentellen Teil konnte die errechnete Periodendauer für das mathematische Pendel mit Rücksicht auf die Fehlerquellen und die Messgenauigkeit bestätigt werden.

Der Verfasser kommt zu dem Schluss, dass das eigenständig entwickelte Verfahren durchaus zur Anwendung in der Physik kommen könnte.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung
1.1. Anlass und Grundgedanke
1.2. Voraussetzungen

2. Hauptteil
2.1. Theoretische Lösung des Problems
2.1.1. Allgemeine Lösung
2.1.2. Das mathematische Pendel
2.1.3. Das Zykloidenpendel
2.1.4. Das Ellipsenpendel

2.2. Versuch zum mathematischen Pendel
2.2.1. Versuchsaufbau
2.2.2. Versuchsablauf und Ergebnisse

2.3. Fehlerrechnungen

2.4. Diskussion

3. Schluss
3.1. Kritische Würdigung der Arbeit

4. Anhang
- Abbildungen
- Nebenrechnungen
- Versuchsgeräte
- Tabellen

5. Literaturverzeichnis

1. Einleitung

1.1. Anlass und Grundgedanke

Die Periodendauer des mathematischen Pendels bei großen Ausschlägen ist bisher über recht schwierige Verfahren der Infinitesimalrechnung und Reihenentwicklung ermittelt worden. Das in der vorliegenden Arbeit entwickelte neue Verfahren zur Bestimmung der Periodendauern für ausgesuchte Schwingungen der Ebene soll den Rechenweg einerseits vereinfachen, aber auch in Bezug auf seine Genauigkeit an zwei Beispielen mit dem alten Verfahren verglichen werden.

Grundgedanke ist die zeitgleiche Simulation der jeweiligen Pendelschwingung durch eine geradlinige harmonische Schwingung (Federpendel, Oszillator).

1.2. Voraussetzungen

Alle ausgesuchten Schwingungen gehen von einem Massenpunkt aus, der in der senkrechten Ebene an einem masselosen Faden um einen festen Punkt schwingen soll.

Der Pendelfaden darf hierbei - von der Ruhelage aus gesehen - höchstens um 90° ausgelenkt werden, da die maximal rücktreibende Kraft in der Ausgangshöhe liegen muss, in welcher keine Zusatzbeschleunigung auftreten soll.

Um einen freien Fall zu verhindern, müssten sonst Stangen statt Fäden verwendet werden, welche aber nicht (wie notwendig) an Evoluten der Schwingungsbahnen angeschmiegt werden könnten. Trotz der Anschmiegung wird zur Vereinfachung die Länge des Pendels in Ruhelage angenommen.

Der Krümmungsradius der Schwingungsbahn muss von der Ruhelage aus entweder konstant bleiben oder sich stetig verringern, damit ebenfalls ein freier Fall verhindert wird.

© 1983-2024 by Boris Haase

Reibungs- und Dämpfungserscheinungen sollen vernachlässigt werden.

Anderenfalls sind weitere Berechnungen für die Periodendauer notwendig, die aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden.

2. Hauptteil
2.1. Theoretische Lösung des Problems
2.1.1. Allgemeine Lösung

Die Periodendauer einer harmonischen Schwingung ist gegeben durch:

$$\text{(a) } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}.$$

Nach dem Energieerhaltungssatz gilt:

$$(b)\ ½\ m\ v^2 = ½\ D\ s^2 = m\ g\ h.$$

Bei einer Schwingung bilden die Lageenergie W_{pot} und die Bewegungsenergie W_{kin} die konstante Summe:

$$(c)\ W_{pot} + W_{kin} = W_{pot}{}^0.$$

$W_{pot}{}^0$ soll nun durch die Spannenergie W_{sp} ausgedrückt werden, um eine von der Amplitude abhängige Direktionsgröße $D(\varphi_0)$ zu ermitteln. $D(\varphi_0)$ soll dann in die Formel (a) zur Ermittlung der Periodendauer eingesetzt werden.

Dazu ist eine Ersatzbewegung der Masse m durch die Kraft F auf dem Direktionsweg s notwendig. Es gilt:

$$(d)\ D = F/s \text{ (Hookesches Gesetz) und}$$

$$(e)\ F = ma = ml\ddot{\varphi} \text{ (Newton).}$$

Im Weiteren wird immer wieder auf die Direktionsgröße D des ebenen Fadenpendels bei minimaler Amplitude zurückgegriffen. Hierbei gilt für die rücktreibende und zur Schwingungsbahn tangentiale Kraft F_R, da die Normalkraft durch die Spannkraft des Fadens aufgehoben wird (1, 2):

$$(f)\ F_R = mg \sin\varphi = -ml\ddot{\varphi}.$$

Daraus folgt:

$$\text{(g) } \ddot{\varphi} = \sin\varphi = \frac{g}{l}.$$

Für kleinste Ausschlagswinkel φ kann $\sin\varphi$ durch φ ersetzt werden, und es gelten die Bedingungen für die harmonische Schwingung. Daher ist:

$$(h)\ \ddot{\varphi} = \omega^2\varphi$$

und aus (g) folgt:

$$\text{(i) } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Somit gilt:

$$\text{(j) } D = m\,\omega^2 = m\frac{g}{l}.$$

Für größere Amplituden muss sich die Direktionsgröße D aus dem Produkt der Direktionsgröße für die harmonische Schwingung mit einem die unharmonische Schwingung bestimmenden Funktionswert $f(\varphi_0)$ des Ausschlagswinkels φ zusammensetzen.

Man schreibt:

$$\text{(k) } D(\varphi_0) = \left(m\frac{g}{l}\right) f(\varphi_0).$$

Der Funktionswert $f(\varphi_0)$ ist jedoch für die harmonische Bedingung des Energiesatzes nicht definiert, sodass er sich bei einer Einführung herausheben muss. Mit $s = xl$ gilt:

$$(l)\ \frac{1}{2}\frac{\frac{f(\varphi_0)mxg}{xl}(xl)^2}{\varphi_0} = mgh.$$

Hiermit kann der sich nicht ändernde Direktionsweg s über den Energiesatz berechnet werden, wenn man den Funktionswert $f(\varphi_0)$ der rücktreibenden Kraft F_R zuordnet. Mit

$$\frac{1}{2}\left(m\frac{g}{l}\right)s^2 = mgh$$

ergibt sich für den Direktionsweg:

$$(m)\ s = \sqrt{2lh}.$$

Die rücktreibende Kraft F_R muss also unabhängig vom Energiesatz entwickelt werden. Sie ist vielmehr durch die Ausgangsschwingung als die in der Ausgangshöhe der Schwingungsbahn tangential angreifende und somit maximal rücktreibende Kraft festgelegt. Aus

$$(n)\ F_R = (-)\ m\ a$$

erhält man mit (a) und (d) die Periodendauer:

$$(o)\ T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2lh}}{a}}.$$

Anschaulich stellt der Direktionsweg s mit (m) die Sehne eines Kreises mit dem Radius l dar. Da dieser Kreis Krümmungskreis für die Ruhelage der Schwingungsbahn ist, muss diese Sehne von einem Kreisbahnpunkt in der Ausgangshöhe h zur Ruhelage führen.

Die einfachste Form einer Schwingungsbahn, die sich mit dem Krümmungskreis deckt und eine punktförmige Evolute besitzt, ist die des mathematischen Pendels (Abb. 1). Dieses soll darum zuerst behandelt werden.

2.1.2. Das mathematische Pendel

Aus Abb. 1 erhält man für den Direktionsweg s:

$$s = 2\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)l.$$

Mit (f) gilt für die maximal rücktreibende Kraft F_R:

$$F_R = (-)\ mg\sin\varphi_0.$$

Die Periodendauer ist mit (a) und (d) daher:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)g}}.$$

2.1.3. Das Zykloidenpendel

Für die gemeine Zykloide (Abb. 2) gilt die Parametergleichung (2):

$$x = a\ (\phi - \sin\phi) \text{ und } y = a\ (\cos\phi - 1).$$

Für den Krümmungsradius ρ erhält man:

$$\rho = 4a\sin\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Da die Winkel ϕ von der Ausgangshöhe h zur Ruhelage bei $\phi = \pi$ zunehmen bzw. der Sinus von $\phi/2$ nach Überschreiten der Ruhelage zum Umkehrpunkt wieder abnimmt, sind die Voraussetzungen für die Berechnung der Periodendauer erfüllt.

Die Ausgangshöhe ist:

$$h = 2\,a + y = a\,(\cos\phi_0 + 1).$$

Setzt man h in (m) ein, gilt mit $l = 4\,a$:

$$s = l\sqrt{\frac{\cos\phi_0 + 1}{2}}\cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right)l.$$

Da die Tangentialbeschleunigung b_t stets senkrecht zum Krümmungsradius ρ wirkt, erhält man für sie:

$$b_t = \alpha\cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right)g.$$

Wenn $\phi_0 = 0$ ist, dann ist $b_t = g$, wenn $\phi_0 = \pi$ ist, dann ist $b_t = 0$. Daher muss der Multiplikator $\alpha = 1$ sein und gelten:

$$b_t = \cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right)g.$$

Mit (o) ergibt sich schließlich für die Periodendauer:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Dieses wurde durch Huygens schon Jahrhunderte vorher bewiesen.

2.1.4. Das Ellipsenpendel

Für die Ellipse (Abb. 3) gilt die Parametergleichung (3):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Für den Krümmungsradius ρ ergibt sich nach Differentiation (siehe Anhang):

$$\rho = \frac{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)^{3/2}}{a^4b}.$$

Von der Ruhelage mit $x = 0$ zu den Umkehrpunkten hin nimmt x zu, und da $a^2\,x^2 > b^2\,x^2$ ist, verringert sich der Krümmungsradius stetig. In der Ruhelage ist ρ daher:

$$\rho = l = \frac{a^2}{b}.$$

Mit

$$y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

ist die Ausgangshöhe h:

$$h = b + y = b\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right).$$

Mit (m) ergibt sich daher für den Direktionsweg s:

$$s = \sqrt{2a\left(a-\sqrt{a^2-x^2}\right)}.$$

Damit ist der Direktionsweg unabhängig von der kleinen Halbachse der Ellipse.

Die Tangentialbeschleunigung b_t ist (nach Abb. 3):

$$b_t = \cos\beta\, g = \frac{bxg}{\sqrt{a^4-a^2x^2+b^2x^2}}.$$

Mit (o) erhält man für die Periodendauer:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{a^4-a^2x^2+b^2x^2}\sqrt{2a\left(a-\sqrt{a^2-x^2}\right)}}{bxg}}.$$

Für $x = 0$ ist die Periodendauer zwar nicht definiert, für sehr kleine x gilt jedoch:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^2}{bg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Für $x = a$ ergibt sich der Satz:

Die Schwingungsdauer auf einer Ellipse bei maximalem Ausschlag ist unabhängig von der kleinen Halbachse.

2.2. Versuch zum mathematischen Pendel

Im experimentellen Teil wurde sich aus zeitlichen Gründen auf das mathematische Pendel beschränkt.

Nicht nur das Anfertigen von Evoluten wäre andererseits sehr aufwendig, sondern bei der Zykloiden- bzw. Ellipsenschwingung würden sich auch größere Fehlerquellen erschließen. Hierzu gehört die Schwierigkeit, das Pendel genau an die Evolute schwingen zu lassen, da schon nach wenigen Schwingungen das Pendel die senkrechte Ebene verlässt. Außerdem treten beim Anschwingen und im Lager Impuls- bzw. Reibungskräfte auf, die bei großen Amplituden das jeweilige Pendel zum mathematischen Pendel werden lassen.

Letzteres kann daher als Teil für das Ganze betrachtet werden.

2.2.1. Versuchsaufbau

Zwei meterlange Stangen werden mit einer dritten und vier Muffen verbunden und symmetrisch durch zwei Deckenhaken geschoben. In der Mitte wird zusätzlich ein Winkelmesser und das Lager für den Pendelfaden von 1.60 m Länge befestigt.

Eine Luftkissenfahrbahn wird parallel dazu auf dem Labortisch so platziert, dass ihre Mitte sich senkrecht unter der Spitze des Winkelmessers befindet.

Ein auf der Mitte platzierter Fahrbahnwagen von 0.2 kg Masse wird durch zwei Federn so eingespannt, dass zwischen der Einspannung am Ende des Labortisches und des Wagens eine Direktionsgröße von 2 N/m herrscht.

Eine Stoppuhr wird griffbereit von der Ausgangshöhe des Pendels und des Wagens aufgestellt.

Eine Abbildung zum Versuch befindet sich auf dem Titelblatt. Im Anhang sind auch alle verwendeten Geräte aufgeführt.

2.2.2. Versuchsablauf und Ergebnisse

Zuerst wurde sich von der Unabhängigkeit der Periodendauer von der Pendelmasse überzeugt, indem einmal eine ca. 5 kg schwere Kugel, ein anderes Mal der auf 1 kg Masse beschwerte Fahrbahnwagen am Pendelfaden befestigt wurden. Der Unterschied der gemessenen Periodendauern betrug eine hundertstel Sekunde auf jede der zehn Perioden.

Bei der Simulation des mathematischen Pendels durch den harmonischen Oszillator betrug die Zeitdifferenz pro Schwingung 0.6 s (Hin- und Hergang) bei zehn Schwingungen und 60° maximaler Auslenkung des Pendels.

Zur Berechnung der Masse des harmonischen Oszillators wurde die Formel verwandt:

$$m = \frac{2l}{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) g}.$$

Letztere kann direkt aus den Periodendauern für die beiden Systeme ermittelt werden.

Hierbei ist die Direktionsgröße D_0 für den Oszillator das Doppelte der gleichgroßen Federkonstanten der verwendeten Zugfedern. Die Periodendauer des Oszillators ist daher:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2D}} \ (4).$$

Die oben errechnete Periodendauer des mathematischen Pendels ist:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) g}}.$$

Die Dämpfung des Pendels bei einer Auslenkung von 60° betrug 1°, die des Oszillators 0.01 m bei einer Auslenkung von 0.9 m.

Die Messwerte für Ausschläge des mathematischen Pendels von 0° bis 90° sind in Tab. 1 im Anhang aufgeführt.

2.3. Fehlerrechnungen

Die Periodendauer des mathematischen Pendels wurde bisher über das elliptische Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

mit

$$k = \sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

angegeben (2).

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right)}.$$

Um einen direkten Vergleich mit der neuen Formel für die Periodendauer:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) g}}.$$

anstellen zu können, wird der Funktionswert

$$f(\varphi_0) = \sqrt{\frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)}}$$

mit Hilfe der Reihe bei $|x| < 1$:

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)x^2}{1 \cdot 2} + \frac{p(p-1)(p-2)x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots \quad (2)$$

und der Beziehung:

$$f(\varphi_0) = \frac{1}{\sqrt[4]{1\text{-}\sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)}}$$

bei

$$x = \text{-}\sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) = \text{-}k^2$$

in die Vergleichsreihe:

$$1 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 2}\right)^2 \left(\frac{k}{2}\right)^4 + \left(\frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right)^2 \left(\frac{k}{2}\right)^6 + \cdots$$

umgewandelt.

Hieraus ergibt sich, dass die beiden Reihen bis zum ersten quadratischen Glied übereinstimmen.

Teilt man die alte durch die neue Reihe und subtrahiert 1, so ergibt sich die dem Betrag nach kleinere Reihe des relativen Fehlers:

$$\frac{1}{64}k^4 + \frac{1}{64}k^6 + \frac{231}{16384}k^8 + \cdots.$$

Dividiert man umgekehrt bei gleicher Subtraktion, so ist der relative Fehler größer:

$$\frac{1}{64}k^4 + \frac{1}{64}k^6 + \frac{235}{16384}k^8 + \cdots.$$

Die Reihe des absoluten Fehlers ergibt sich durch Subtraktion der alten von der neuen Reihe:

$$\frac{1}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6 + \frac{335}{16384}k^8 + \cdots.$$

Die Werte für ausgesuchte Winkel von 0° bis 90° aller hier aufgeführten Reihen sind im Anhang in Tabellen festgehalten.

2.4. Diskussion

An dieser Stelle soll einmal über die in der Formel:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2lh}}{a}}.$$

auftretenden Proportionalitäten nachgedacht werden.

Zuerst ist festzuhalten, dass der Direktionsweg s zu der Beschleunigung a der rücktreibenden Kraft F_R nicht proportional ist, sondern der in a enthaltene Funktionswert $f(\varphi_0)$ berücksichtigt werden muss.

Die Länge der Schwingungsbahn wird über den Direktionsweg angeglichen:
Wenn die Ausgangshöhe h sehr klein ist, wird der zurückzulegende Weg auf der Schwingungsbahn in y-Richtung und damit auch die Periodendauer kleiner.

Ist die Schwingungsbahn außerdem noch sehr flach, tritt der geringen Ausgangshöhe eine große Pendellänge gegenüber, sodass man für die Länge des Direktionsweges ein Mittelmaß erhält, wie es besonders deutlich bei maximalen Amplituden des Ellipsenpendels zum Vorschein kommt.

Bei stark gekrümmten Schwingungsbahnen und großen Ausgangshöhen wie beim mathematischen Pendel ist die Periodendauer relativ größer.

In der unmittelbaren Nähe der Ruhelage heben sich die Zahlenwerte von Direktionsweg und Beschleunigung auf, sodass der Direktionsweg zur Länge l des Pendels und die Beschleunigung zur Normfallbeschleunigung g wird.

In der Ruhelage selbst ist die Periodendauer streng genommen nicht definiert, weil dort die Ausgangshöhe h und die Beschleunigung a Null werden.

Je größer die Beschleunigung a ist, desto kleiner ist die Periodendauer, anderenfalls liegen umgekehrte Verhältnisse vor.

Diese Erkenntnisse konnten in dem Versuch zum mathematischen Pendel relativ gut bestätigt werden.

3. Schluss

Im Rückblick lässt sich sagen, dass die tatsächliche Vorgangsweise mit der in dieser aus Übersichtlichkeitsgründen angeführten nicht vollständig übereinstimmt.

So wurde erst das Problem des mathematischen Pendels gelöst und dann eine allgemeine Problemlösung aufgestellt. Alle Periodendauern wurden ohne Kenntnis der in der entsprechenden Literatur angegebenen Periodendauern berechnet, deren Einsicht wie der Versuch erst Wochen später erfolgte.

Der Rechenweg konnte in der Tat stark vereinfacht und in Bezug auf die Genauigkeit zu dem alten Verfahren brauchte die Fehlergrenze von 0,01 bzw. ein Prozent nicht überschritten werden.

Hierbei konnte das Ellipsenpendel nicht miteinbezogen werden, da über dessen Periodendauer keine Literaturangaben gefunden werden konnten.

Höchstwahrscheinlich wird sich die Fehlergrenze jedoch nach oben verlagern, da das mathematische Pendel als Spezialfall des Ellipsenpendels, dessen Periodendauer bei gleich langen Halbachsen in die des mathematischen Pendels überführt werden kann, schon eine Abweichung von knapp ein Prozent bei maximaler Amplitude in Bezug auf seine Periodendauer besitzt.

Die Widerspruchslosigkeit der Periodendauer des Zykloidenpendels zu den Literaturangaben ist jedoch gegeben.

3.1. Kritische Würdigung der Arbeit

Zweifelsohne ist das Evolutenproblem noch nicht vollständig gelöst. Wenn man nicht mehr die Pendellänge in Ruhelage voraussetzt, muss unter Umständen doch wieder auf Verfahren der Infinitesimalrechnung und Reihenentwicklung zurückgegriffen werden, um eine größere Genauigkeit zu erreichen.

Dazu steht jedoch einerseits das mathematische Pendel, andererseits das Zykloidenpendel im Widerspruch.

Bei ersterem fehlt eine ausgeprägte Evolute trotz Abweichung, bei letzterem existiert keine Abweichung trotz des Vorhandenseins einer Evolute.

Somit muss das neue Verfahren als eigenständig gelten.

Eine genauere Klärung des Sachverhalts würden die in dieser Arbeit leider fehlenden Messungen zu weiteren Periodendauern als der des mathematischen Pendels liefern. Hierbei sind allerdings sehr hohe Anforderungen an die Messgenauigkeit und den Ablauf der Versuche zu stellen.

Insgesamt gesehen erfordert das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren zwar eine gewisse Umstellung in der Denkweise, dennoch sollte es aufgrund der erzielten guten Ergebnisse in der Physik seine Anwendung finden können.

4. Anhang

Abbildungen

Abb. 1

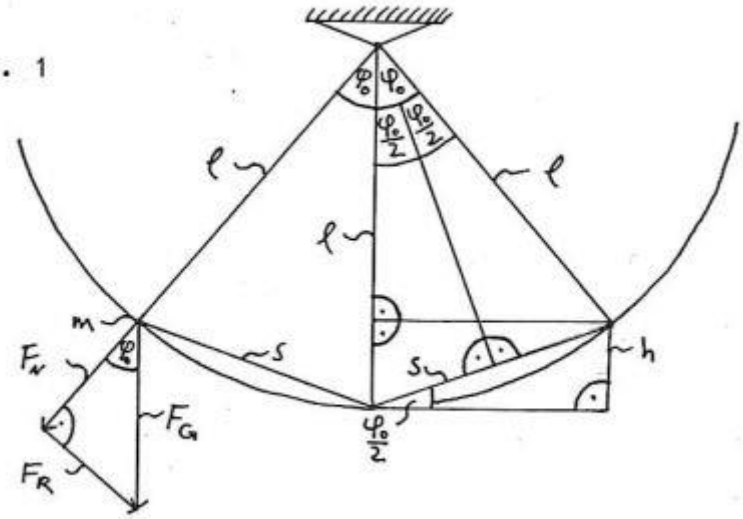


Abb. 2

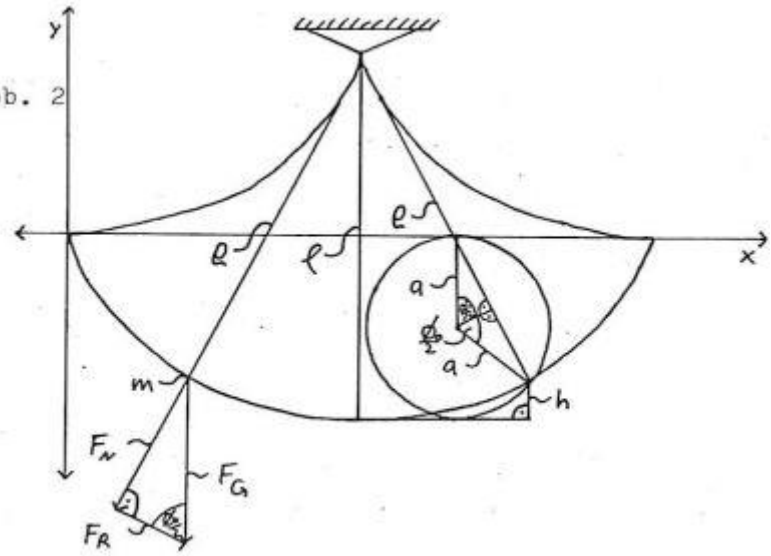
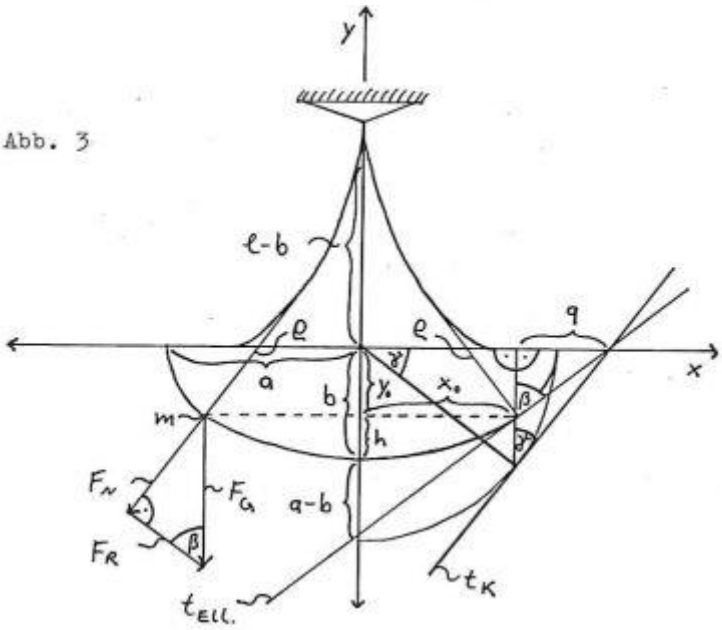


Abb. 3



Alle Konstruktionen erfolgten mit Hilfe von (9).

Nebenrechnungen

Für den Krümmungsradius gilt die allgemeine Formel (3):

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y}\text{-}\dot{y}\ddot{x}}.$$

Die gemeine Zykloide hat die Parametergleichung (2):

$$x = a\,(\phi - \sin\phi) \text{ und } y = a\,(\cos\phi - 1).$$

Für

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}$$

kann man daher

$$(a^2\text{-}2\cos\phi\, a^2 + \cos^2\phi\, a^2 + \sin^2\phi\, a^2)^{3/2} = (2a^2\text{-}2\cos\phi\, a^2)^{3/2}$$

schreiben. Mit

$$\dot{x}\ddot{y}\text{-}\dot{y}\ddot{x} = (a\text{-}\cos\phi\, a)(\text{-}\cos\phi\, a)\text{-}(\text{-}\sin\phi\, a)\sin\phi\, a = a^2\text{-}\cos\phi\, a^2$$

gilt somit für den Krümmungsradius ρ:

$$\rho = 2a\sqrt{2(1\text{-}\cos\phi)} = 4a\sin\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Schreibt man bei der Ellipse vorübergehend $x = \sin\varphi\, a$ und

$$y = \text{-}b\sqrt{1\text{-}\frac{x^2}{a^2}} = \cos\varphi\, b,$$

so ergibt sich:

$$\dot{x}\ddot{y}\text{-}\dot{y}\ddot{x} = \cos\varphi\, a(\cos\varphi\, b)\text{-}\sin\varphi\, b(\text{-}\sin\varphi\, a) = ab.$$

Damit ist der Krümmungsradius:

$$\rho = \frac{(\cos^2\varphi a^2 + \sin^2\varphi b^2)^{3/2}}{ab}.$$

Hebt man die Umwandlung wieder auf, erhält man nach Erweiterung des Bruches mit a^3 für ρ:

$$\rho = \frac{(a^4\text{-}a^2x^2 + b^2x^2)^{3/2}}{a^4b}.$$

Die Evolute der gemeinen Zykloide ist ebenfalls eine Zykloide mit gleichem a (5).

Für die Evolute der Ellipse gilt jedoch (6):

$$\xi = \frac{(a^2\text{-}b^2)\cos^3 t}{a}.$$

und

$$\eta = \frac{(a^2\text{-}b^2)\sin^3 t}{b}$$

mit $x = a\cos t$ und $y = b\sin t$.

Um die Tangentialbeschleunigung b_t der Ellipse berechnen zu können, sind folgende Vorüberlegungen notwendig:

$$\tan\gamma = \frac{\sqrt{a^2\text{-}x^2}}{x} = \frac{q}{\sqrt{a^2\text{-}x^2}}.$$

Daraus folgt direkt:

$$q = \frac{a^2\text{-}x^2}{x}.$$

Für

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{q^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{\left(\frac{a^2\text{-}x^2}{x}\right)^2 + y^2}}$$

kann man nach Erweitern mit

$$\frac{ax}{\sqrt{a^2\text{-}x^2}}$$

schreiben:

$$\cos\beta = \frac{bx}{\sqrt{a^4\text{-}a^2x^2 + b^2x^2}}.$$

Um die Formel für die Periodendauer des Ellipsenpendels:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{a^4\text{-}a^2x^2 + b^2x^2}\sqrt{2a\left(a\text{-}\sqrt{a^2\text{-}x^2}\right)}}{bxg}}.$$

in die des mathematischen Pendels umzuwandeln, muss $x = \sin(\varphi_0)\ a$ und $a = b = 1$ gesetzt werden. Somit gilt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^2\sqrt{2\left(1\text{-}\sqrt{1\text{-}\frac{x^2}{a^2}}\right)}}{xg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\sqrt{2(1\text{-}\cos(\varphi_0)}}{\sin(\varphi_0)g}}.$$

Daher ist schließlich:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)g}}.$$

Versuchsgeräte

2 Tischklemmen für Labortisch mit zwei Halterungen für die Federn
2 1 m lange Zugfedern mit einer Federkonstanten von ca. 2 N/m und einem Durchmesser von ca. 0,01 m
1 2 m lange Luftkissenbahn mit Luftregler
2 Fahrbahnwagen mit Blende und Außenhaken von je 0,2 kg Masse
1 Kugelmasse von ca. 5 kg Masse
1 Pendelfaden von höchstens 1,60 m Länge
1 Stoppuhr
2 Deckenhaken
1 Bis zu 2 m ausziehbarer Ständer mit Halterung
7 Muffen
7 Stangen mit zweimal 1 m, einmal 0,6 m, zweimal 0,5 m, einmal 0,1 m und einmal 0,2 m Länge als Winkelstange
1 Klemme für Winkelmesser mit Hölzchen
1 Winkelmesser
1 Klebeband
sowie diverse Auflagegewichte

Tabellen

Tab. 1

$\varphi_0/°$	T_{exp}/s	T_{thn}/s	T_{tha}/s	$\Delta T_{an}/\%$	$\Delta T_{aa}/\%$
90	2,95	3,02	3,00	2,26	1,52
80	2,87	2,90	2,89	1,02	0,58
70	2,78	2,80	2,80	0,86	0,61
60	2,72	2,73	2,72	0,26	0,13
50	2,65	2,67	2,66	0,60	0,54
40	2,61	2,62	2,62	0,31	0,29
30	2,58	2,58	2,58	0,09	0,08
20	2,55	2,56	2,56	0,29	0,29
10	2,52	2,54	2,54	0,90	0,90
5	2,51	2,54	2,54	1,15	1,15

T_{exp} = experimentell ermittelte Periodendauer (Durchschnittswerte)

T_{thn} = theoretische Periodendauer nach dem neuen Verfahren

T_{tha} = theoretische Periodendauer nach dem alten Verfahren

ΔT_{an} = absolute Differenz von T_{exp} und T_{thn} mit T_{thn} als Bezugswert

ΔT_{aa} = absolute Differenz von T_{exp} und T_{tha} mit T_{tha} als Bezugswert

Hierbei sind:
$l = 1{,}60$ m
$g = 9{,}80665$ m/s²

Tab. 2

$\phi_0/°$	$f(T_0)_n$	$f(T_0)_a$	$\Delta f(T_0)_{rkl}$	$\Delta f(T_0)_{rgr}$	$\Delta f(T_0)_a$
90	1,18921	1,18034	0,74558	0,75118	0,88665
80	1,14254	1,13749	0,44214	0,44411	0,50517
70	1,10489	1,10214	0,24815	0,24877	0,27418
60	1,07457	1,07318	0,12916	0,12933	0,13879
50	1,05042	1,04978	0,06045	0,06049	0,06350
40	1,03159	1,03134	0,02418	0,02418	0,02494
30	1,01748	1,01741	$8*10^{-3}$	$8*10^{-3}$	$8*10^{-3}$
20	1,00768	1,00766	$1*10^{-3}$	$1*10^{-3}$	$1*10^{-3}$
10	1,00191	1,00191	$1*10^{-4}$	$1*10^{-4}$	$1*10^{-4}$
5	1,00048	1,00048	$6*10^{-6}$	$6*10^{-6}$	$6*10^{-6}$
4	1,00030	1,00030	$3*10^{-6}$	$2*10^{-6}$	$2*10^{-6}$
3	1,00017	1,00017	$8*10^{-7}$	$7*10^{-7}$	$8*10^{-7}$
2	1,00008	1,00008	$3*10^{-7}$	$2*10^{-7}$	$2*10^{-7}$
1	1,00002	1,00002	$2*10^{-7}$	$1*10^{-7}$	$1*10^{-7}$
0	1,00000	1,00000	0	0	0

$f(T_0)_n$ = Funktionswert der Periodendauer des mathematischen Pendels, mit dem die Periodendauer des Zykloidenpendels multipliziert werden muss, nach dem neuen Verfahren

$f(T_0)_a$ = der gleiche nach dem alten Verfahren

$\Delta f(T_0)_{rkl}$ = kleinere relative Differenz der beiden

$\Delta f(T_0)_{rgr}$ = größere relative Differenz der beiden

$\Delta f(T_0)_a$ = absolute Differenz der beiden

Hierbei sind alle $\Delta f(T_0)_x$ in Prozent angegeben.

5. Literaturverzeichnis

1. Arnold, Günter
   Formeln der Mathematik, Hrsg. von H. Netz
   3. Auflage, 1977, Carl Hauser, München (9)

2. Beyer, William H. (Herausgeber)
   CRC Handbook of Mathematical Sciences
   5. Auflage, 1978, CRC Press Inc., 2255 Palm Beach Lakes Blvd. (8)

3. Deutsch, Harri (Herausgeber)
   Kleine Enzyklopädie Mathematik
   2. neubearb. Auflage, 1980, Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/M. (3)

4. Dorn, Friedrich / Bader, Franz
   Physik in einem Band (4) und Physik-Oberstufe, Band O (1)
   Neubearb. Ausgabe, 1976, Hermann Schroedel, Hannover

5. Fichtenholz, G. M.
   Differential- und Integralrechnungen 1
   dt. Orig.ausg., 1964, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (6)

6. Franke, Hermann (Herausgeber)
   dtv-Lexikon der Physik in 10 Bänden
   3. neubearb. und erweit. Auflage, 1970, Deutscher Taschenbuch Verlag, München (5)

7. Sieber, Helmut

Mathematische Begriffe und Formeln
1. Auflage, 1973, Ernst Klett, Stuttgart (7)

8. Spiegel, Murray R.
Allgemeine Mechanik
dt. Orig.ausg., 1976, McGraw-Hill Inc., Düsseldorf (2)

Nachtrag:

Heute bin ich natürlich in der Lage die korrekten Periodendauern zu berechnen und den Fehler zu meiner Näherungsformel anzugeben.

Es gilt:

$$mgh_0 = mgh + \frac{1}{2}m\frac{ds^2}{dt^2}.$$

Mit $x = x(t)$ und $y = y(t)$ gilt:

$$T = \sqrt{\frac{8}{g}}\int_0^{s_0}\sqrt{\frac{1}{h_0\text{-}h}}ds = \sqrt{\frac{8}{g}}\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0\text{-}y}}dx = \sqrt{\frac{8}{g}}\int_0^{t_0}\sqrt{\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y_0\text{-}y}}dt.$$

Die Näherungsformel lautet:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2lh}}{a}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2(1+y'(0)^2)^{3/2}y_0\left(1+y_0'^2\right)}}{gy_0'\sqrt{y''(0)}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2(\dot{x}(0)^2+\dot{y}(0)^2)^{3/2}y_0(\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2)}}{g\dot{y}_0\sqrt{\dot{x}(0)\ddot{y}(0)\text{-}\dot{y}(0)\ddot{x}(0)}}}.$$

Mit $x = a\sin\varphi$, $y = b - b\cos\varphi$,

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, k = \sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

und

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2\text{-}b^2}{a^2}$$

gilt für die Näherungsformel und $\varepsilon^2 < 1$

$$T = \frac{2\pi a\sqrt[4]{1\text{-}\varepsilon^2\sin^2\varphi_0}}{\sqrt{bg\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)}}$$

die Reihenentwicklung:

$$T = \frac{2\pi a}{\sqrt{bg}}\left\{1 + \frac{1}{4}k^2\text{-}\varepsilon^2k^2 + \frac{5}{32}k^4 + \frac{3}{4}\varepsilon^2k^4\text{-}\frac{3}{2}\varepsilon^4k^4 + O(k^6)\right\}.$$

Für das Ellipsenpendel gilt exakt

$$T = \sqrt{\frac{8a^2}{bg}}\int_0^{\varphi_0}\sqrt{\frac{1\text{-}\varepsilon^2\sin^2\varphi}{\cos\varphi\text{ - }\cos\varphi_0}}d\varphi$$

mit der Reihenentwicklung:

$$T = \frac{2\pi a}{\sqrt{bg}}\left\{1 + \frac{1}{4}k^2\text{-}\varepsilon^2k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \frac{3}{8}\varepsilon^2k^4\text{-}\frac{3}{4}\varepsilon^4k^4 + O(k^6)\right\}.$$

Mit dem quadratisch konvergierenden arithmetisch-geometrischen Mittel $M\left(1, \cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right)$ ergibt sich noch genauer und für das mathematische Pendel (wegen $a = b$ bzw. $\varepsilon = 0$) exakt:

$$T = \frac{2\pi a}{\sqrt{bg}}\left\{\frac{1}{M\left(1, \cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right)}\text{-}\varepsilon^2k^2 + \frac{3}{8}(\varepsilon^2\text{-}2\varepsilon^4)k^4 + \frac{5}{64}(\varepsilon^2 + 12\varepsilon^4\text{-}16\varepsilon^6)k^6 + O(\varepsilon^2k^8)\right\}.$$

Universum

Wir können das Universum unendlich n-dimensional bspw. als Würfel, Kugel oder Sphäre auffassen. Hierbei kann die maximale Ausdehnung endlich sein, da eine unendliche Unterteilung möglich ist. Der Würfel gibt die Homogenität am besten wieder, die Kugel oder die Sphäre die gleichmäßige Ausdehnung in jeder Richtung, ohne bestimmte Richtungen voreinander auszuzeichnen. Homogenität und Krümmung brauchen nicht messbar zu sein.

Die n Dimensionen können nicht nur den Raum umfassen, sondern alle endlich oder unendlich skalierten Substanzen (s. Bezugstheorie), also insbesondere die Zeit. Gott kann das Universum sehr unterschiedlich anordnen. Z. B. können auf einer Kugel um den Südpol die einfachsten Welten liegen und um den Nordpol die komplexesten. Zur Veranschaulichung kann eine geeignete Verallgemeinerung der Riemannschen Zahlenkugel dienen.

Die Größe des Radius können wir vielleicht in unserer Welt bestimmen, nicht aber allgemein. Kleinste Einheiten einer Substanz wie die Planck-Einheiten mag es in mancher Welt nicht geben. Der Begriff der Unendlichkeit ist nicht auf die Zeit fixiert, sondern über die Begriffe Einheit und Maßstab auf jede (messbare) Substanz ausdehnbar. Das sukzessive Abtragen einer Einheit an einem Maßstab prädestiniert allerdings den Zeitbegriff.

Raumpunkte brauchen weder Form noch Ausdehnung zu haben, sodass sie sich beliebig dicht zusammenschieben lassen. Sie sind dennoch etwas und können Abstände mit nichts dazwischen haben. Es ist unsere Anschauung, die das Dazwischenliegende ausfüllen kann und Ausdehnung verleiht. Analoges gilt für alle anderen Substanzen: Auf dieselben Substanzen lassen sich unterschiedliche Gesetze bzw. (gesetzlose) Freiheiten anwenden.

Deren Zuordnungen zu uns ergeben unterschiedliche Erlebnis- bzw. Parallelwelten für uns. Dies führt zu einem sogenannten Durchdringungsmodell. Es ist wichtig, dass Gott die (Natur-) Gesetze angemessen macht. Dies gilt insbesondere für chaotische oder stark inhomogene Welten und solche mit mehreren Zeitachsen. Bezüge helfen unendliche Entfernungen zu überwinden. Jedes Geschöpf hat eine Welt im Universum gemäß seinem Karma verdient.

© 1983-2024 by Boris Haase

Über mich

Geburt:
1964 in Kiel

Adresse:
Cranachstr. 4, 63452 Hanau

Beruf:
Geprüfter Informatiker (Fernakademie)

Studium:
Mathematik mit Nebenfach Informatik an den Universitäten TU Clausthal und U Göttingen

Arbeitsstelle:
Klinikum Hanau GmbH

Hobbies:
Forschen, Informatik, Mathematik, Medien und Fitness

Mitgliedschaften:
Deutsche Mathematiker-Vereinigung

Soziale Netzwerke:
Academia.edu, Facebook.com und ResearchGate

Literaturverzeichnis

[1] Hamp, Vinzenz; Stenzel, Meinrad; Kürzinger, Josef (Hrsg.): *Die Heilige Schrift des Alten und Neuen Testamentes*; 4. Aufl.; 1988; Pattloch Verlag; München; ISBN 3629052002; Bilder von Rembrandt.
[2] W.-Winter, L. (Bearb.); Ullmann, Ludwig (Übertr.): *Der Koran - Das Heilige Buch des Islam*; 1. Aufl.; 1986; Wilhelm Goldmann Verlag; München; ISBN 3442086132; Taschenbuch.
[3] Grimm, Georg: *Die Lehre des Buddho*; 20. unveränd. Aufl.; 1979; R. Löwit; Wiesbaden; ISBN 3894272120; Hrsg. von M. Keller-Grimm und Max Hoppe.
[4] Fromer, Jakob (Übertr.): *Der Babylonische Talmud*; 2. Aufl.; 1988; Fourier-Verlag; Wiesbaden; ISBN 3921695880; kommentierte Auswahl.
[5] Franz, Albert; Baum, Wolfgang; Kreutzer, Karsten: *Lexikon philosophischer Grundbegriffe der Theologie*; 2. Aufl.; 2007; Herder; Freiburg; ISBN 9783451290954; korrigierte Fassung der Erstauflage.
[6] Sharamon, Shalila; Baginski, Bodo J.: *Das Chakra-Handbuch*; 50. Aufl.; 2006; Windpferd; Aitrang; ISBN 3893850384; Taschenbuch.
[7] Alston, William P.: *A Realist Conception of Truth*; 1st Ed.; 1996; Cornell University Press; Ithaca and London; ISBN 0801484103; Taschenbuch.
[8] Cumpsty, John S.: *Religion As Belonging*; 1st Ed.; 1991; University Press of America; Lanham; ISBN 0819183598; A General Theory of Religion.
[9] Alston, William P.: *Perceiving God*; 2nd Printing; 1995; Cornell University Press; Ithaca and London; ISBN 0801481554; The Epistemology of Religious Experience.
[10] Stiver, Dan R.: *The Philosophy of Religious Language*; Reprint; 1997; Blackwell; Malden; ISBN 1557865825; Sign, Symbol, and Story.
[11] Fischer, Johannes: *Theologische Ethik*; 1. Aufl.; 2002; Kohlhammer; Stuttgart; ISBN 3170168916; Grundwissen und Orientierung.
[12] Jörns, Klaus-Peter: *Die neuen Gesichter Gottes*; 1. Aufl.; 1997; C. H. Beck; München; ISBN 340642936X; Was die Menschen heute wirklich glauben.
[13] Krieg, Carmen; Kucharz, Thomas; Volf, Miroslav (Hrsg.): *Die Theologie auf dem Weg in das dritte Jahrtausend*; 1. Aufl.; 1996; Chr. Kaiser; Gütersloh; ISBN 3579020080; Festschrift.
[14] Anzenbacher, Arno: *Einführung in die Ethik*; 1. Aufl.; 1992; Patmos; Düsseldorf; ISBN 3491779251; Philosophische Grundlagenprobleme.
[15] Sharma, Arvind (Ed.): *Fragments of Infinity*; 1st Ed.; 1991; Prism Press; Dorset; ISBN 1853270660; Essays in Religion and Philosophy.
[16] Ratzinger, Joseph: *Einführung in das Christentum*; Neuausg.; 2005; Weltbild; Augsburg; ISBN 382894949320; Benedikt XVI..
[17] Ratzinger, Joseph: *Glaube - Wahrheit - Toleranz*; 2. Aufl.; 2003; Herder; Freiburg; ISBN 3451281104; Das Christentum und die Weltreligionen.
[18] Ratzinger, Joseph: *Jesus von Nazareth*; 1. Aufl.; 2007; Herder; Freiburg; ISBN 9783451298615; Erster Teil von der Taufe im Jordan bis zur Verklärung.
[19] Ratzinger, Joseph: *Gott und die Welt*; 1. Aufl.; 2000; Deutsche Verlags-Anstalt; Stuttgart München; ISBN 3421054282; Glauben und Leben in unserer Zeit.
[20] Szczesny, Gerhard; Wilhelm, Kurt: *Die Antwort der Religionen*; 1. Aufl.; 1964; Szczesny; München; ASIN B0000BFUGR; 31 Fragen.
[21] Drewermann, Eugen: *Kleriker*; 3. Aufl.; 1992; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423300108; Psychogramm eines Ideals.
[22] Smith, Huston: *Eine Wahrheit viele Wege*; 2. Aufl.; 1994; Hermann Bauer; Freiburg; ISBN 3762604657; Die großen Religionen der Welt.
[23] Hirsch, Eike Christian: *Vorsicht auf der Himmelsleiter*; 1. Aufl.; 1987; Hoffmann und Campe; Hamburg; ISBN 3455086284; Auskünfte in Glaubensfragen.
[24] Hick, John: *Religion*; 1. Aufl.; 1996; Diederichs; München; ISBN 3424013110; Die menschlichen Antworten auf die Frage nach Leben und Tod.
[25] Thomas, Gordon; Morgan-Witts, Max: *Der Vatikan*; Lizenzausg.; 1984; Manfred Pawlak; Herrsching; ISBN 3881993223; Mechanismen kirchlicher Macht.
[26] Trillhaas, Wolfgang: *Religionsphilosophie*; 1. Aufl.; 1972; Walter de Gruyter; Berlin; ISBN 3110038684; Lehrbuch.
[27] Vries, S. Ph. de: *Jüdische Riten und Symbole*; 9. Aufl.; 2003; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499187582; Taschenbuch.
[28] Borchert, Bruno: *Mystik*; 1. Aufl.; 1997; Herder; Freiburg; ISBN 3451045300; Das Phänomen - Die Geschichte - Neue Wege.
[29] James, William: *Die Vielfalt religiöser Erfahrung*; 1. Aufl.; 1997; Insel; Frankfurt und Leipzig; ISBN 345833484X; Mit einem Vorwort von Peter Sloterdijk.

[30] Lanczkowski, Günter: *Geschichte der nichtchristlichen Religionen*; 1. Aufl.; 1989; Fischer; Frankfurt am Main; ISBN 3596245648; aktualisierte und erweiterte Neuausgabe.
[31] Küng, Hans: *Christ sein*; 3. Aufl.; 2004; Piper; München; ISBN 3492217362; Taschenbuch.
[32] Küng, Hans: *Existiert Gott?*; 3. Aufl.; 2004; Piper; München; ISBN 3492221440; Antwort auf die Gottesfrage der Neuzeit.
[33] Küng, Hans: *Das Christentum*; 1. Aufl. Taschenbuch; 1999; Piper; München; ISBN 3492229409; Die religiöse Situation der Zeit.
[34] Küng, Hans: *Das Judentum*; 1. Aufl. Taschenbuch; 1999; Piper; München; ISBN 3492228275; Die religiöse Situation der Zeit.
[35] Küng, Hans: *Der Islam*; 1. Aufl. Taschenbuch; 2006; Piper; München; ISBN 3492247091; Geschichte, Gegenwart, Zukunft.
[36] Ruh, Ulrich; Seeber, David; Walter, Rudolf (Hrsg.): *Handwörterbuch religiöser Gegenwartsfragen*; 2. Aufl.; 1989; Herder; Freiburg; ISBN 3451216124; Sonderausgabe.
[37] Adam, Gottfried; Lachmann, Rainer (Hrsg.): *Religionspädagogisches Kompendium*; 5. neubearb. Aufl.; 1997; Vandenhoeck & Ruprecht; Göttingen; ISBN 352561330X; Taschenbuch.
[38] Henning, Christian; Murken, Sebastian; Nestler, Erich (Hrsg.): *Einführung in die Religionspsychologie*; 1. Aufl.; 2003; Ferdinand Schöningh; Paderborn; ISBN 350699011X; Taschenbuch.
[39] Kühn, Ulrich: *Christologie*; 1. Aufl.; 2003; Vandenhoeck & Ruprecht; Göttingen; ISBN 3525032412; Taschenbuch.
[40] Stolz, Fritz: *Grundzüge der Religionswissenschaft*; 2., überarb. Aufl.; 1997; Vandenhoeck & Ruprecht; Göttingen; ISBN 3525032919; Taschenbuch.
[41] Moeller, Bernd: *Geschichte des Christentums in Grundzügen*; 6., verb. Aufl.; 1996; Vandenhoeck & Ruprecht; Göttingen; ISBN 3525032803; Taschenbuch.
[42] Jäger, Christoph (Hrsg.): *Analytische Religionsphilosophie*; 1. Aufl.; 1998; Ferdinand Schöningh; Paderborn; ISBN 3506994891; Taschenbuch.
[43] Fraas, Hans-Jürgen: *Die Religiosität des Menschen*; 1. Aufl.; 1990; Vandenhoeck & Ruprecht; Göttingen; ISBN 3525032749; Ein Grundriss der Religionspsychologie.
[44] Johann-Adam-Möhler-Institut (Hrsg.): *Kleine Konfessionskunde*; 2., durchges. und akt. Aufl.; 1997; Bonifatius; Paderborn; ISBN 3897100002; Taschenbuch.
[45] Lanczkowski, Günter (Bearb.): *Meyers Kleines Lexikon Religionen*; 1. Aufl.; 1987; Bibliographisches Institut; Mannheim; ISBN 3411026588; hrsg. von d. Red. für Religion und Theologie.
[46] Beyerhaus, Peter; Padberg, Lutz E. v. (Hrsg.): *Eine Welt - eine Religion?*; 1. Aufl.; 1988; Schulte & Gerth; Asslar; ISBN 3877397751; Die synkretistische Bedrohung unseres Glaubens im Zeichen von New Age.
[47] Paden, William E.: *Am Anfang war Religion*; Dt. Erstausg.; 1990; Gerd Mohn; Gütersloh; ISBN 3579007874; Die Einheit in der Vielfalt.
[48] Möhler, Johann Adam; Newman, John Henry; Guardini, Romano et al.: *Gott in dieser Zeit*; 1. Aufl.; 1990; Matthias Grünewald; Mainz; ISBN 3786715114; Eine Herausforderung der Theologie.
[49] Schweitzer, Albert: *Das Christentum und die Weltreligionen*; 2., unveränd. Aufl.; 1984; C. H. Beck; München; ISBN 3406067816; Zwei Aufsätze zur Religionsphilosophie.
[50] Mynarek, Hubertus: *Ökologische Religion*; 1. Aufl.; 1986; Wilhelm Goldmann; München; ISBN 3442120055; Ein neues Verständnis der Natur.
[51] Pöhlmann, Horst Georg: *Der Atheismus oder der Streit um Gott*; 5. Aufl.; 1986; Gerd Mohn; Gütersloh; ISBN 3579052187; Taschenbuch.
[52] Lehmann, Karl: *Es ist Zeit, an Gott zu denken*; 2. Aufl.; 2000; Herder; Freiburg; ISBN 34515054; Ein Gespräch mit Jürgen Hoeren.
[53] Khoury, Adel Th.; Hünermann, Peter (Hrsg.): *Wer ist Gott?*; 1. Aufl.; 1983; Herder; Freiburg; ISBN 3451080796; Die Antwort der Weltreligionen.
[54] Löhr, Gebhard: *Gott - Gebote - Ideale*; 1. Aufl.; 1991; Vandenhoeck & Ruprecht; Göttingen; ISBN 3525335768; Analytische Philosophie und theologische Ethik.
[55] Grün, Anselm; Sartorius, Christiane: *Dem Himmel zur Ehre - Der Erde zum Zeichen*; 3. Aufl.; 1997; Herder; Freiburg; ISBN 3451237946; Menschliches Reifen im Ordensleben.
[56] Hawking, Stephen W.: *Ist alles vorherbestimmt?*; 1. Aufl.; 1996; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499220679; Sechs Essays.
[57] Lyre, Holger: *Informationstheorie*; 1. Aufl.; 2002; Wilhelm Fink; München; ISBN 3825222896; Eine philosophisch-naturwissenschaftliche Einführung.
[58] Reinhardt, Fritz; Soeder, Heinrich: *dtv-Atlas zur Mathematik Band 1*; 9. Aufl.; 1991; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423030070; Grundlagen, Algebra und Geometrie.
[59] Reinhardt, Fritz; Soeder, Heinrich: *dtv-Atlas zur Mathematik Band 2*; 5. Aufl.; 1984; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423030089; Analysis und angewandte Mathematik.

[60] Bronstein, Il'ja N. (Begr.); Grosche, Günter (Bearb.); Zeidler, Eberhard: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik Teil 1*; 1. Aufl.; 1996; Teubner; Leipzig; ISBN 3815420016; Taschenbuch.
[61] Grosche, Günter (Hrsg.): *Teubner-Taschenbuch der Mathematik Teil 2*; 7. Aufl.; 1995; Teubner; Leipzig; ISBN 3815421004; vollst. überarb. und wesentlich erw. Neufassung.
[62] Grosche, G.; Ziegler, V. (Hrsg.): *Taschenbuch der Mathematik*; Nachdruck der 20. Aufl.; 1983; Harri Deutsch; Thun; ISBN 3871444928; Neubearbeitung, ältere Ausgabe.
[63] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*; 3. Aufl.; 1984; Harri Deutsch; Thun; ISBN 3871444936; Ergänzende Kapitel.
[64] Schmidt, Werner: *Lehrprogramm Vektorrechnung*; 1. Aufl.; 1978; Verlag Chemie; Weinheim; ISBN 3527210741; Mit Beispielen aus der Physik.
[65] Kleppner, Daniel; Ramsey, Norman: *Lehrprogramm Differential- und Integralrechnung*; 2. Aufl.; 1982; Verlag Chemie; Weinheim; ISBN 3527210911; Taschenbuch.
[66] Fischer, Gerd: *Analytische Geometrie*; 6., überarb. Aufl.; 1992; Friedrich Vieweg; Braunschweig; ISBN 3528572353; Taschenbuch.
[67] Guillen, Michael: *Brücken ins Unendliche*; 2. Aufl.; 1987; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423106980; Die menschliche Seite der Mathematik.
[68] Benesch, Hellmuth: *dtv-Atlas zur Psychologie Band 1*; 1. Aufl.; 1987; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423032243; Tafeln und Texte.
[69] Benesch, Hellmuth: *dtv-Atlas zur Psychologie Band 2*; 1. Aufl.; 1987; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423032251; Tafeln und Texte.
[70] Heinrich, Dieter; Hergt, Manfred: *dtv-Atlas zur Ökologie*; 3. Aufl.; 1994; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423032286; Tafeln und Texte.
[71] Abels, Heinz: *Einführung in die Soziologie 1*; 1. Aufl.; 2001; Westdeutscher Verlag; Wiesbaden; ISBN 353113610; Der Blick auf die Gesellschaft.
[72] Abels, Heinz: *Einführung in die Soziologie 2*; 1. Aufl.; 2001; Westdeutscher Verlag; Wiesbaden; ISBN 3531136119; Die Individuen in ihrer Gesellschaft.
[73] Jäger, Wieland: *Reorganisation der Arbeit*; 1. Aufl.; 1999; Westdeutscher Verlag; Wiesbaden; ISBN 3531134736; Ein Überblick zu aktuellen Entwicklungen.
[74] Soziologie, Arbeitsgruppe: *Denkweisen und Grundbegriffe der Soziologie*; 13. Aufl.; 1998; Campus Verlag; Frankfurt am Main; ISBN 3593347156; Eine Einführung.
[75] Weber, Max: *Soziologische Grundbegriffe*; 6., erneut durchges. Aufl.; 1984; Mohr; Tübingen; ISBN 3165448302; Taschenbuch-Sonderausgabe.
[76] Bourdieu, Pierre: *Die feinen Unterschiede*; 1. Aufl.; 1987; Suhrkamp; Frankfurt am Main; ISBN 3518282581; Kritik der gesellschaftlichen Urteilskraft.
[77] Herfurtner, Rudolf: *Gloria von Jaxtberg oder die Prinzessin vom Pfandhof*; 1. Aufl.; 1988; Thienemann; Stuttgart, Wien; ISBN 3522425006; Bilder von Reinhard Michl.
[78] Temming, Rolf L.: *Illustrierte Geschichte der Eisenbahn*; 1. Aufl.; 1976; Manfred Pawlak; Herrsching; ASIN B0000BMJT1; ohne ISBN.
[79] Shulman, Sandra: *Geschichte der Astrologie*; 1. Aufl.; 1978; Rheingauer Verlagsgesellschaft; Eltville; ISBN 3881020187; Von der Antike bis zur Gegenwart.
[80] Glück, Helmut (Hrsg.): *Metzler-Lexikon Sprache*; 2., überarb. und erw. Aufl.; 2000; Metzler; Stuttgart, Weimar; ISBN 347601519X; Mit 70 Abbildungen, davon 17 Karten.
[81] Prechtl, Peter; Burkard, Franz-Peter (Hrsg.): *Metzler-Philosophie-Lexikon*; 1. Aufl.; 1996; Metzler; Stuttgart, Weimar; ISBN 3476012573; Begriffe und Definitionen.
[82] Lutz, Bernd (Hrsg.): *Metzler-Philosophen-Lexikon*; 1. Aufl.; 1989; Metzler; Stuttgart; ISBN 3476006395; Dreihundert biographisch-weltgeschichtliche Porträts von den Vorsokratikern bis zu den Neuen Philosophen.
[83] Störig, Hans Joachim: *Kleine Weltgeschichte der Philosophie*; 17., vollst. überarb. und erw. Aufl.; 1999; Kohlhammer; Stuttgart; ISBN 3170160702; gebunden.
[84] Schmidinger, Heinrich: *Metaphysik*; 1. Aufl.; 2000; Kohlhammer; Stuttgart; ISBN 3170163086; Ein Grundkurs.
[85] Heidegger, Martin: *Sein und Zeit*; 17. Aufl.; 1993; Niemeyer; Tübingen; ISBN 3484701226; gebunden.
[86] Heidegger, Martin: *Über den Humanismus*; 9. Aufl.; 1991; Vittorio Klostermann; Frankfurt am Main; ISBN 3465022742; broschiert.
[87] Hüntelmann, Rafael: *Existenzontologie*; 1. Aufl.; 1997; Röll; Dettelbach; ISBN 392752283X; gebunden.
[88] Siegmann, Georg: *Plotins Philosophie des Guten*; 1. Aufl.; 1990; Königshausen & Neumann; Würzburg; ISBN 3884794671; Eine Interpreatation von Enneade VI 7.
[89] Hartmann, Nicolai: *Der Aufbau der realen Welt*; 3. Aufl.; 1964; Walter de Gruyter; Berlin; ASIN B0000BJ3UP; Grundriss der allgemeinen Kategorienlehre.

[90] Weyl, Hermann: *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*; 7. Aufl.; 2000; Oldenbourg; München; ISBN 3486467972; Scientia Nova.
[91] Trillhaas, Wolfgang: *Ethik*; 3., neubearb. und erw. Aufl.; 1970; Walter de Gruyter; Berlin; ASIN B0000BTTHQ; Sondereinband.
[92] Balzer, Wolfgang: *Die Wissenschaft und ihre Methoden*; 1. Aufl.; 1997; Alber; München; ISBN 3495478531; Grundsätze der Wissenschaftstheorie.
[93] Körner, Stephan: *Erfahrung und Theorie*; 1. Aufl.; 1970; Suhrkamp; Frankfurt am Main; ISBN 3518570633; Ein wissenschaftstheoretischer Versuch.
[94] Weizsäcker, Carl Friedrich von: *Zeit und Wissen*; 1. Aufl.; 1992; Carl Hanser; München, Wien; ISBN 3446163670; gebunden.
[95] Weizsäcker, Carl Friedrich von: *Bewusstseinswandel*; 1. Aufl.; 1988; Carl Hanser; München, Wien; ISBN 3446146490; gebunden.
[96] Swinburne, Richard: *Gibt es einen Gott?*; 1. deutsche Aufl.; 2006; Ontos; Heusenstamm; ISBN 3937202919; Englisch: Is there a God?, 1996.
[97] Russ, Jaqueline: *Les méthodes en philosophie*; Cinquième tirage; 1992; Armand Colin; Paris; ISBN 220033088X; Taschenbuch.
[98] Jonas, Hans: *Wissenschaft als persönliches Erlebnis*; 1. Aufl.; 1987; Vandenhoeck & Ruprecht; Göttingen; ISBN 3525013426; Sammlung Vandenhoeck.
[99] Brüntrup, Godehard: *Das Leib-Seele-Problem*; 1. Aufl.; 1996; Kohlhammer; Stuttgart; ISBN 3170140051; Eine Einführung.
[100] Ulke, Karl-Dieter: *Vorbilder im Denken*; 1. Aufl.; 1988; Kösel; München; ISBN 3466400627; 32 Porträts großer Philosophen.
[101] Kühn, Manfred: *Kant*; 1. Aufl.; 2003; C. H. Beck; München; ISBN 3406509185; Eine Biographie.
[102] Sollbach, Armin: *Erhabene Kunst der Vernunft*; 1. Aufl.; 1996; Hahner Verlagsgesellschaft; Aachen-Hahn; ISBN 3892940703; gebunden.
[103] Gaarder, Jostein: *Sofies Welt*; 1. Aufl.; 1993; Carl Hanser; München, Wien; ISBN 3446173471; Roman über die Geschichte der Philosophie.
[104] Berner, Knut: *Theorie des Bösen*; 1. Aufl.; 2004; Neukirchener Verlag; Neukirchen-Vluyn; ISBN 3788720476; Zur Hermeneutik destruktiver Verknüpfungen.
[105] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band I/1*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047211; Vorgeschichte - Frühe Hochkulturen.
[106] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band I/2*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047211; Vorgeschichte - Frühe Hochkulturen.
[107] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band II/1*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047238; Hochkulturen des mittleren und östlichen Asiens.
[108] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band II/2*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047246; Hochkulturen des mittleren und östlichen Asiens.
[109] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band III/1*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047254; Griechenland - Die hellenistische Welt.
[110] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band III/2*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047262; Griechenland - Die hellenistische Welt.
[111] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band IV/1*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047270; Rom - Die römische Welt.
[112] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band IV/2*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047289; Rom - Die römische Welt.
[113] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band V/1*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047297; Islam - Die Entstehung Europas.
[114] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band V/2*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 35480472997; Islam - Die Entstehung Europas.
[115] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band VI/1*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047319; Weltkulturen - Renaissance in Europa.
[116] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band VI/II*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047327; Weltkulturen - Renaissance in Europa.
[117] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band VII/1*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047335; Von der Reformation zur Revolution.
[118] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band VII/2*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047343; Von der Reformation zur Revolution.
[119] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band VIII/1*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047351; Das neunzehnte Jahrhundert.

[120] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band VIII/2*; Taswchenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548147364; Das neunzehnte Jahrhundert.
[121] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band IX/1*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047378; Das zwanzigste Jahrhundert.
[122] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band IX/2*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047384; Das zwanzigste Jahrhundert.
[123] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band X/1*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047394; Die Welt von heute.
[124] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band X/2*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047408; Die Welt von heute.
[125] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band XI/1*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047416; Summa Historica.
[126] Mann, Golo; Heuss, Alfred (Hrsg.): *Propyläen Weltgeschichte Band XI/2*; Taschenbuchausgabe; 1976; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548047424; Summa Historica.
[127] Reiners, Ludwig: *Stilkunst*; Ungekürzte Sonderausgabe; 1980; C. H. Beck; München; ISBN 3406025250; Ein Lehrbuch deutscher Prosa.
[128] Gregor-Dellin, Martin (Hrsg.): *Deutsche Schulzeit*; 1. Aufl.; 1979; Nymphenburger Verlagshandlung; München; ISBN 3485003530; Erinnerungen und Erzählungen aus drei Jahrhunderten.
[129] Ende, Michael: *Die unendliche Geschichte*; 1. Aufl.; 1979; Thienemann; Stuttgart; ISBN 3522128001; gebunden.
[130] Ende, Michael: *Momo*; 7. Aufl.; 1977; Thienemann; Stuttgart; ISBN 3522119401; Märchen-Roman.
[131] Sager, Peter: *Realismus*; 4. Aufl.; 1982; DuMont; Köln; ISBN 3770106563; Kunst zwischen Illusion und Wirklichkeit.
[132] Biermann, Kurt-R.: *Carl Friedrich Gauß*; 1. Aufl.; 1990; C. H. Beck; München; ISBN 340634240X; Der "Fürst der Mathematiker" in Briefen und Gesprächen.
[133] Reich-Ranicki, Marcel (Hrsg.): *Anbruch der Gegenwart*; 1. Aufl.; 1987; Piper; München; ISBN 3492018920; Deutsche Geschichten 1900-1918.
[134] Scharnagl, Hermann: *Geheimnisse aus dem Kloster*; 1. Aufl.; 2005; Gondrom; Bindlach; ISBN 3811224905; Gesundheit und Lebenskunst aus der Stille.
[135] Fessler, Beate: *Der neue Medikamentenführer*; 2. Aufl.; 1999; Südwest; München; ISBN 3517076805; Das Arzneimittel-Standardwerk zum Nachschlagen: Über 1900 Wirkstoffe und Medikamente.
[136] Ameln, Falko von: *Konstruktivismus*; 1. Aufl.; 2004; A. Francke; Tübingen, Basel; ISBN 3772033644; Die Grundlagen systematischer Therapie, Beratung und Bildungsarbeit.
[137] Müller, Horst M. (Hrsg.): *Arbeitsbuch Linguistik*; 1. Aufl.; 2002; Ferdinand Schöningh; Paderborn; ISBN 3506970070; UTB 2169.
[138] Greene, Brian: *Der Stoff, aus dem der Kosmos ist*; 1. Aufl.; 2006; Pantheon; München; ISBN 3570550028; Raum, Zeit und die Beschaffenheit der Wirklichkeit.
[139] Kinder, Hermann; Hilgemann, Werner: *dtv-Atlas zur Weltgeschichte Band II*; 14. Aufl.; 1979; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 342303002X; Von der Französischen Revolution bis zur Gegenwart.
[140] Franke, Hermann (Hrsg.): *dtv-Lexikon der Physik Band 1*; Lizenzausgabe; 1970; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423030410; A - B.
[141] Franke, Hermann (Hrsg.): *dtv-Lexikon der Physik Band 2*; Lizenzausgabe; 1970; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423030429; C - El.
[142] Franke, Hermann (Hrsg.): *dtv-Lexikon der Physik Band 3*; Lizenzausgabe; 1970; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423030437; Em - Glo.
[143] Franke, Hermann (Hrsg.): *dtv-Lexikon der Physik Band 4*; Lizenzausgabe; 1970; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423030445; Glu - Kel.
[144] Franke, Hermann (Hrsg.): *dtv-Lexikon der Physik Band 5*; Lizenzausgabe; 1970; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 342303045?; Ken - Lic.
[145] Franke, Hermann (Hrsg.): *dtv-Lexikon der Physik Band 6*; Lizenzausgabe; 1970; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423030461; Lie - Oz.
[146] Franke, Hermann (Hrsg.): *dtv-Lexikon der Physik Band 7*; Lizenzausgabe; 1971; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 342303047X; P - Re.
[147] Franke, Hermann (Hrsg.): *dtv-Lexikon der Physik Band 8*; Lizenzausgabe; 1971; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423030488; Rh - Stra.
[148] Franke, Hermann (Hrsg.): *dtv-Lexikon der Physik Band 9*; Lizenzausgabe; 1971; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423030496; Stre - Vir.

[149] Franke, Hermann (Hrsg.): *dtv-Lexikon der Physik Band 10*; Lizenzausgabe; 1971; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 342303050X; Vis - Z.
[150] Asimov, Isaac: *Die exakten Geheimnisse unserer Welt Band 1*; 1. Aufl.; 1988; Knaur; München; ISBN 3426039214; Kosmos, Erde, Materie, Technik.
[151] Asimov, Isaac: *Die exakten Geheimnisse unserer Welt Band 2*; 1. Aufl.; 1988; Knaur; München; ISBN 3426039222; Bausteine des Lebens.
[152] Marsch, Friederike; Marsch, Detlef: *Physik für Krankenpflegeberufe*; 4., durchgesehene Aufl.; 1992; Thieme; Stuttgart; ISBN 3135833046; 74 Abbildungen.
[153] Sexl, Roman; Sexl, Hannelore: *Weiße Zwerge - Schwarze Löcher*; 2., erw. Aufl.; 1984; Vieweg; Braunschweig; ISBN 3528172142; Einführung in die relativistische Astrophysik.
[154] Berninger, Ernst H.: *Otto Hahn*; 1. Aufl.; 1979; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499502046; Monographie.
[155] Einstein, Albert: *Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*; 21. Aufl.; 1982; Vieweg; Braunschweig; ISBN 352806059X; Band 59.
[156] Fölsing, Albrecht: *Albert Einstein*; 1. Aufl.; 1995; Suhrkamp; Frankfurt am Main; ISBN 3518389904; Eine Biographie.
[157] Cramer, Friedrich: *Der Zeitbaum*; 1. Aufl.; 1996; Insel; Frankfurt am Main; ISBN 3458335498; Grundlegung einer allgemeinen Zeittheorie.
[158] Davies, Paul: *Prinzip Chaos*; 1. Aufl.; 1990; Goldmann; München; ISBN 3442114691; Die neue Ordnung des Kosmos.
[159] Davies, Paul: *Gott und die moderne Physik*; 1. Aufl.; 1989; Goldmann; München; ISBN 3442114764; Taschenbuch.
[160] Pitsch, Werner Josef: *Chemie für Krankenpflegeberufe*; 3., überarb. Aufl.; 1992; Thieme; Stuttgart; ISBN 313663103X; 66 Abbildungen, 10 Tabellen.
[161] Hermann, Peter: *Allgemeine und Anorganische Chemie*; 5. Aufl.; 1993; Gustav Fischer; Jena; ISBN 3334002373; Einführung für Biologen, Mediziner und Pharmazeuten.
[162] Weizsäcker, Carl Friedrich von: *Aufbau der Physik*; 1. Aufl.; 1988; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423108991; Taschenbuch.
[163] Weizsäcker, Carl Friedrich von: *Die Einheit der Natur*; 3. Aufl.; 1983; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 346611386X; Studien.
[164] Görnitz, Thomas: *Carl Friedrich von Weizsäcker*; 1. Aufl.; 1992; Herder; Freiburg; ISBN 3451041251; Ein Denker an der Schwelle zum neuen Jahrtausend.
[165] Ditfurth, Hoimar von: *Wir sind nicht nur von dieser Welt*; 7. Aufl.; 1990; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 342310290X; Naturwissenschaft, Religion und die Zukunft des Menschen.
[166] Vester, Frederic: *Phänomen Stress*; 5. Aufl.; 1983; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3421026831; Wo liegt sein Ursprung, warum ist er lebenswichtig, wodurch ist er entartet?.
[167] Vester, Frederic: *Neuland des Denkens*; 1. Aufl.; 1984; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 342102703X; Vom technokratischen zum kybernetischen Zeitalter.
[168] Kleinschmidt, Nina; Eimler, Wolf-Michael: *Wer hat das Schwein zur Sau gemacht?*; 3. Aufl.; 1984; Knaur; München; ISBN 3426037238; Mafia-Methoden in der deutschen Landwirtschaft.
[169] Arieti, Silvano: *Schizophrenie*; 5. Aufl.; 1993; Piper; München; ISBN 3492107133; Ursachen, Verlauf, Therapie - Hilfen für Betroffene.
[170] Wemmer, Ulrich; Korczak, Dieter: *Gesundheit in Gefahr*; 1. Aufl.; 1993; Fischer; Frankfurt am Main; ISBN 3596105110; Daten-Report 1993/94.
[171] Holtmeier, Hans-Jürgen: *Gesundheit aus dem Meer*; 1. Aufl.; 1983; Molden; München; ISBN 3889190227; Ratgeber.
[172] Flechtner, Hans-Joachim: *Grundbegriffe der Kybernetik*; 5. Aufl.; 1984; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423044225; Eine Einführung.
[173] Burnett, Frances: *Der kleine Lord*; 1. Aufl.; 1972; Knaur; München; ISBN 3426011042; Mit 29 Bildern von Martin und Ruth Koser-Michaels.
[174] Dannenberg, Hans-Dieter: *Schwein haben*; 1. Aufl.; 1990; Gustav Fischer; Jena; ISBN 3334002985; Historisches und Histörchen vom Schwein.
[175] Musil, Robert: *Gesammelte Werke 3*; 1. Aufl.; 1978; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499300036; Der Mann ohne Eigenschaften.
[176] Musil, Robert: *Gesammelte Werke 4*; 1. Aufl.; 1978; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499300044; Der Mann ohne Eigenschaften.
[177] Musil, Robert: *Gesammelte Werke 5*; 1. Aufl.; 1978; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499300052; Der Mann ohne Eigenschaften.
[178] Musil, Robert: *Gesammelte Werke 6*; 1. Aufl.; 1978; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499300060; Prosa und Stücke.

[179] Musil, Robert: *Gesammelte Werke 7*; 1. Aufl.; 1978; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499300079; Kleine Prosa - Aphorismen - Autobiographisches.
[180] Musil, Robert: *Gesammelte Werke 8*; 1. Aufl.; 1978; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499300087; Essays und Reden.
[181] Bundesministerium des Innern (Hrsg.): *Was Sie schon immer über Umweltschutz wissen wollten*; 2. Aufl.; 1981; Kohlhammer; Stuttgart; ISBN 3170072595; Aufklärung der Öffentlichkeit in Umweltfragen.
[182] Falke, Jutta; Kaspar, Ulrich (Hrsg.): *Politiker beschimpfen Politiker*; 2., durchges. Aufl.; 1998; Reclam; Leipzig; ISBN 3379016179; Mit einem Nachwort von Heiner Geißler.
[183] Lucas, Manfred: *Arbeitszeugnisse richtig deuten*; 17., aktualisierte Aufl.; 1997; Econ; Düsseldorf; ISBN 3612213105; Taschenbuch.
[184] Heinser, Bernhard (Hrsg.): *Weihnachten*; 7. Aufl.; 1995; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423240008; Prosa aus der Weltliteratur.
[185] ohne Angaben: *Marco Polo Reiseführer*; 1. Aufl.; 1997; Mairs Geographischer Verlag; Ostfildern; ISBN 3895254401; Die wichtigsten Sprachen.
[186] Kammer, Hilde; Bartsch, Elisabet: *Jugendlexikon Politik*; 2., akt. und. erw. Aufl.; 1977; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499161834; 800 einfache Antworten auf schwierige Fragen.
[187] Chen, Chao-Hsiu: *Feng Shui*; 3. Aufl.; 1996; Wilhelm Heyne; München; ISBN 345310997X; Gesund und glücklich wohnen in Buddhas Haus und Garten.
[188] James, Paul: *Prince Edward*; 1. Aufl.; 1995; Lübbe; Bergisch Gladbach; ISBN 340461321X; Der jüngste Sohn der Queen.
[189] Ferguson, Sarah: *Meine Geschichte*; 3. Aufl.; 1996; Lübbe; Bergisch Gladbach; ISBN 3404126505; Aufgeschrieben von Jeff Coplon.
[190] Lexikonredaktion des Franz Schneider Verlages (Hrsg.): *Reiten A - Z*; 1. Aufl.; 1977; Franz Schneider; München; ISBN 3505077828; Das Lexikon für Pferdefreunde.
[191] Schäfer, Michael: *Die Sprache des Pferdes*; 1. Aufl.; 1980; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499173824; Lebensweise und Ausdrucksformen.
[192] Smythe, R. H.: *Pferdeverhalten - verständlich gemacht*; 2. Aufl.; 1976; Franckh'sche Verlagshandlung; Stuttgart; ISBN 3440042391; Franckhs Reiterbibliothek.
[193] Zeeb, Klaus: *Pferde dressiert von Fredy Knie*; 1. Aufl.; 1975; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499169290; Eine Verhaltensstudie.
[194] Stern, Horst: *Bemerkungen über Pferde*; Unkekürzte Ausgabe; 1977; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499168413; Taschenbuch.
[195] Podhajsky, Alois: *Die klassische Reitkunst*; 1. Aufl.; 1980; Rowohlt; Reinbek; ISBN 349917037X; Eine Reitlehre von den Anfängen bis zur Vollendung.
[196] Berg, Dagmar von (Hrsg.): *Reiterbrevier*; 1. Aufl.; 1979; Wilhelm Heyne; München; ISBN 3453420618; Taschenbuch.
[197] Einstein, Albert: *Mein Weltbild*; Unveränd. Ausg.; 1989; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548346839; Hrsg. von Carl Seelig.
[198] Einstein, Albert; Born, Hedwig; Born, Max: *Briefwechsel 1916-1955*; Ungekürzte Ausg.; 1986; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548343457; Geleitwort von Bertrand Russell, Vorwort von Werner Heisenberg.
[199] Wenzel-Bürger, Eva: *Gottlieb Engel*; 1. Aufl.; 1989; Carlsen; Hamburg; ISBN 3551035954; Pixi-Buch.
[200] Drösser, Christoph: *Fuzzy Logic*; 1. Aufl.; 1995; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499196190; Methodische Einführung in krauses Denken.
[201] Krishnamurti, Jiddu: *Fragen und Antworten*; 3. Aufl.; 1986; Goldmann; München; ISBN 3442117534; und sein Gespräch mit Prof. David Bohm über das Erwachen der Intelligenz.
[202] Bibliographisches Institut Mannheim: *Taschenbuch der Vornamen*; 1. Aufl.; 1973; Humboldt; München; ISBN 3581662109; gekürzt aus der Originalausgabe des Duden-Taschenbuches Bd. 4: Lexikon der Vornamen.
[203] Whitaker, James: *Charles gegen Diana*; 1. Aufl.; 1993; Wilhelm Heyne; München; ISBN 3453075285; Szenen einer Ehe.
[204] Stendhal: *Le Rose et le Vert - Rosa und Grün*; Originalausgabe; 1977; Deutscher Taschenbuchverlag; München; ISBN 3423091266; zweisprachig.
[205] Maurier, Daphne du: *Meine Cousine Rachel*; Ungekürzte Ausgabe; 1979; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548032192; Roman.
[206] Hill, Paul: *Gestohlene Jahre*; 2. Aufl.; 1991; Lübbe; Bergisch Gladbach; ISBN 340461206X; Erfahrungen.
[207] Burkowski, Ursula: *Weinen in der Dunkelheit*; 8. Aufl.; 1993; Lübbe; Bergisch Gladbach; ISBN 3404612442; Erfahrungen.

[208] Benoit, Michel: *Gefangener Gottes*; 1. Aufl.; 1993; Lübbe; Bergisch Gladbach; ISBN 3404612728; Erfahrungen.
[209] Schneider, Wolf: *Der vierstöckige Hausbesitzer*; Ungekürzte Ausg.; 1996; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423305479; Plauderstunde Deutsch mit 33 Fragezeichen.
[210] Krämer, Walter; Trenkler, Götz: *Lexikon der populären Irrtümer*; 8. Aufl.; 1999; Piper; München; ISBN 3492224466; 500 kapitale Missverständnisse, Vorurteile und Denkfehler von Abendrot bis Zeppelin.
[211] Padrutt, Hanspeter: *Der epochale Winter*; Vom Autor durchges. Neuaufl.; 1997; Diogenes; Zürich; ISBN 3257218451; Zeitgemäße Betrachtungen.
[212] Thüsen, Heidi Bohnet-von der (Hrsg.): *Denkanstöße '90*; Originalausgabe; 1989; Piper; München; ISBN 3492110584; Ein Lesebuch aus Philosophie, Natur- und Humanwissenschaften.
[213] Lorenz, Konrad: *Die acht Todsünden der zivilisierten Menschheit*; 21. Aufl.; 1989; Piper; München; ISBN 3492100503; Taschenbuch.
[214] Nasemann, Andrea: *Guter Rat bei der Wohnungssuche*; 1. Aufl.; 1997; C. H. Beck; München; ISBN 3423506180; Rechtsfragen zu Wohnungsvermittlung, Abschluss und Inhalt des Mietvertrages, Wohngeld und Umzug.
[215] Eysenck, Hans Jürgen: *Intelligenz-Test*; 185.-194. Tausend; 1988; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499168782; Taschenbuch.
[216] Zeller, Alfred P. (Red.): *1000 Fragen - 1000 Antworten*; Neuaufl.; 1987; Delphin; München; ISBN 3773531141; Taschenbuch.
[217] Rühmann, Heinz: *Das war's*; Ungekürzte Ausgabe; 1985; Ullstein; Frankfurt am Main; ISBN 3548205216; Erinnerungen.
[218] Browne, Dik: *Hägar der Schreckliche*; 5. Aufl.; 1992; Goldmann; München; ISBN 3442119731; Harte Zeiten, Ein Mann - ein Wort, Ohne Furcht und Tadel.
[219] Lust, Thea: *Gehe ins Rathaus und ärgere dich täglich*; Originalausg.; 1987; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499159864; Ein Behörden-Abenteuer-Buchspiel.
[220] Marcks, Marie: *Schöne Aussichten*; 2. Aufl.; 1984; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423101954; Karikaturen.
[221] Bruno, Rainer: *MS Duz*; Originalausg.; 1991; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499129124; Computisch für Hochstapler.
[222] Stein, Uli: *O Mann!*; Originalausg.; 1984; Knaur; München; ISBN 3426021293; 99 Zacken aus der Krone der Schöpfung.
[223] Stein, Uli: *Leicht behämmert*; 2. Aufl.; 1989; Lappan; Oldenburg; ISBN 345302401X; Erfindungen, die uns gerade noch gefehlt haben.
[224] Traxler, Hans: *Gmbh & Kohl KG*; 1. Aufl.; 1984; Schirmer-Mosel; München; ISBN 3888141559; Diesem...,unserem Lande!.
[225] Wandrey, Uwe (Hrsg.): *Heilig Abend zusammen!*; 50.-59. Tsd.; 1985; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499150476; Ein garstiges Allerlei.
[226] Bosc: *Love and Order*; Deutsche Ausgabe; 1973; Diogenes; Zürich; ISBN 3257200668; Cartoons.
[227] Tennant, Rich: *Computer sind auch nur Menschen*; 1. Aufl.; 1993; Goldmann; München; ISBN 3442079926; Cartoons.
[228] Haffner, Sebastian: *Geschichte eines Deutschen*; 1. Aufl.; 2002; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423308486; Die Erinnerungen 1914-1933.
[229] Walsch, Neale Donald: *Gespräche mit Gott Band 1*; 1. Aufl.; 2006; Goldmann; München; ISBN 3442217865; Ein ungewöhnlicher Dialog.
[230] Walsch, Neale Donald: *Gespräche mit Gott Band 2*; 13. Aufl.; 1998; Goldmann; München; ISBN 3442336120; Gesellschaft und Bewusstseinswandel.
[231] Walsch, Neale Donald: *Gespräche mit Gott Band 3*; 10. Aufl.; 1999; Goldmann; München; ISBN 3442336279; Kosmische Weisheit.
[232] Walsch, Neale Donald: *Zuhause in Gott*; 1. Aufl.; 2006; Goldmann; München; ISBN 3442337623; Über das Leben nach dem Tode.
[233] Hofstadter, Douglas R.: *Gödel, Escher, Bach*; 8. Aufl.; 1986; Klett-Cotta; Stuttgart; ISBN 360893037X; ein endloses geflochtenes Band.
[234] Hofstadter, Douglas R.: *Metamagicum*; 1. Aufl.; 1988; Klett-Cotta; Stuttgart; ISBN 3608930892; Fragen nach der Essenz von Geist und Struktur.
[235] Pelletier, Robert: *Das Buch der Aspekte*; 1. Aufl.; 1985; Hugendubel; München; ISBN 3880342776; Astrologie.
[236] Fankhauser, Alfred: *Horoskopie*; 4. Aufl.; 1985; Orell Füssli; Zürich; ISBN 3280015693; Mit 40 Figuren.
[237] Hand, Robert: *Das Buch der Transite*; 1. Aufl.; 1984; Hugendubel; München; ISBN 3880342415; Lebenzyklen erkennen und nutzen.

[238] Fellowship, Rosicrucian: *Ephemerides 1900-2000*; 3rd ed.; 1984; Maison Rosicrucienne; Aubenas; ISBN 2902450206; Astrologie.
[239] Prónay, Alexander von: *Die große Partnerschafts-Analyse*; 2. Aufl.; 1990; Rohm; Bietigheim; ISBN 3876831237; Die Beziehungen zwischen den Menschen im Horoskopvergleich.
[240] Sachs, Gunter: *Die Akte Astrologie*; 3. Aufl.; 1997; Goldmann; München; ISBN 3442307465; Wissenschaftlicher Nachweis eines Zusammenhangs zwischen den Sternzeichen und dem menschlichen Verhalten.
[241] Banzhaf, Hajo; Haebler, Anna: *Schlüsselworte zur Astrologie*; 1. Aufl.; 1994; Hugendubel; München; ISBN 3880347638; gebunden.
[242] Kühn, Volker; Walter, Günter: *"Ich bejahe die Frage rundherum mit Ja"*; 1. Aufl.; 1985; Rasch & Röhring; Hamburg; ISBN 3891360398; Einführung in die Kanzlersprache - Mit Kohl-Kode.
[243] Strunz, Ulrich: *Forever Young*; 5. Aufl.; 2004; Gräfe & Unzer; München; ISBN 3774240019; Das Ernährungsprogramm.
[244] Sheldrake, Rupert: *Das Gedächtnis der Natur*; 4. Aufl.; 1991; Scherz; Bern, München, Wien; ISBN 3502136505; Das Geheimnis der Entstehung der Formen in der Natur.
[245] Blavatsky, Helena Petrowna: *Die Geheimlehre*; 3. Aufl.; 1992; Adyar; Satteldorf; ISBN 3927837113; Gekürzte Ausgabe.
[246] Chown, Marcus: *Das Universum nebenan*; 1. Aufl.; 2003; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423243651; Revolutionäre Ideen in der Astrophysik.
[247] Brothers, Joyce; Eagan, Edward P. F.: *In 10 Tagen zum vollkommenen Gedächtnis*; Genehmigte Lizenzausg.; 2001; Weltbild; Augsburg; ISBN 3893509631; gebunden.
[248] Werner, Günther T.; Nelles, Michaele: *Rückenschule*; 5. Aufl.; 2003; Gräfe & Unzer; München; ISBN 3774218005; Endlich schmerzfrei und entspannt.
[249] Schonert-Hirz, Sabine: *Alles wollen, alles können, alles schaffen energy*; 4. Aufl.; 2005; Gräfe & Unzer; München; ISBN 3774232296; Stress in Energie umwandeln - Innere Kraftquellen entdecken - Ziele sicher erreichen.
[250] Medawar, Peter B.: *Ratschläge für einen jungen Wissenschaftler*; 1. Aufl.; 1984; Piper; München; ISBN 3492028675; gebunden.
[251] Jelínek, J.: *Das große Bilderlexikon des Menschen in der Vorzeit*; 1. Aufl.; 1975; Bertelsmann; Gütersloh; ISBN 3570031500; gebunden.
[252] Öztürk, Yasar Nuri: *400 Fragen zum Islam 400 Antworten*; 3. Aufl.; 2003; Grupello; Düsseldorf; ISBN 3933749174; Ein Handbuch.
[253] Wolf, Notker: *Worauf warten wir?*; 1. Aufl.; 2006; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499620944; Ketzerische Gedanken zu Deutschland.
[254] Frankl, Viktor E.: *Der unbewusste Gott*; 8. Aufl.; 2006; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 342335058X; Psychotherapie und Religion.
[255] Schellenbaum, Peter: *Gottesbilder*; 3. Aufl.; 2004; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423340797; Religion, Psychoanalyse, Tiefenpsychologie.
[256] Wetzig-Würth, Herta; Müller, Peter: *Das psychotherapeutische Gespräch*; 1. Aufl.; 2000; Springer; Berlin; ISBN 3540672516; Therapeutisch wirksame Dialoge in der Arztpraxis.
[257] Dieterich, Michael: *Seelsorge kompakt*; 1. Aufl.; 2006; Brockhaus; Wuppertal; ISBN 3417249465; Zehn Grundlagen für eine ganzheitlich orientierte Beratung und Therapie.
[258] Becker, Volker J.: *Gottes geheime Gedanken*; 1. Aufl.; 2006; Books on Demand; Norderstedt; ISBN 3833448059; Was uns westliche Physik und östliche Mystik über Gott und Geist, Urknall und Universum, Sinn und Sein sagen können.
[259] Otto, Rudolf: *Das Heilige*; 41.-44. Tsd.; 1979; C. H. Beck; München; ISBN 3406025234; Über das Irrationale in der Idee des Göttlichen und sein Verhältnis zum Rationalen.
[260] Augustinus, Aurelius: *Aufstieg zu Gott*; 1. Aufl.; 2001; Patmos; Düsseldorf; ISBN 3491703328; Hrsg., eing. und übers. von Ladislaus Boros.
[261] Henry, Gray; Marriott, Susannah: *Perlen des Glaubens*; 1. Aufl.; 2003; Hugendubel; München; ISBN 3720523810; Wege zu Meditation und Spiritualität: Rosenkränze, Gebetsketten und heilige Worte.
[262] Lauxmann, Frieder: *Wonach sollen wir uns richten?*; 1. Aufl.; 2002; Kreuz; Stuttgart; ISBN 3783121140; Ethische Grundmodelle von den Zehn Geboten bis zum Projekt Weltethos.
[263] Lauxmann, Frieder: *Die Philosophie der Weisheit*; 1. Aufl.; 2002; Nymphenburger; München; ISBN 3485009229; Die andere Art zu denken.
[264] Eastman, Dick: *Wunder sind mir kein Problem*; 1. Aufl.; 1998; Hänssler; Neuhausen-Stuttgart; ISBN 3775128794; Wie Gott jedes Haus erreicht.
[265] Mertz, Bernd A.: *Das Grundwissen der Astrologie*; 1. Aufl.; 1999; Seehamer; Weyarn; ISBN 3934058043; Persönlichkeit, Lebensplan, Partnerschaft, Zukunft.

[266] Taeger, Hans Hinrich: *Astroenergetik*; 1. Aufl.; 1983; Papyrus; Hamburg; ISBN 3922731112; Die zwölf kosmischen Energien.
[267] Ebertin, Reinhold: *Kombination der Gestirneinflüsse*; 12. Aufl.; 1983; Ebertin; Freiburg; ISBN 3871860506; Astrologie.
[268] Ring, Thomas: *Astrologische Menschenkunde III*; 6. Aufl.; 1984; Bauer; Freiburg; ISBN 3762604231; Kombinationslehre.
[269] Andrieu, Irène: *Karma im Horoskop*; 1. Aufl.; 1989; Hugendubel; München; ISBN 3880344388; Die Deutung von Mondknoten, rückläufigen Planeten und Karmaregenten.
[270] Huber, Bruno: *Intelligenz im Horoskop*; 1. Aufl.; 1981; Astrologisch-Psychologisches Institut; Adliswil; ISBN 3855231070; Autodidacta No. 107.
[271] Muckenschnabel, W. R.: *Was die Handschrift verrät*; Sonderausg.; 1986; Gondrom; Bindlach; ISBN 3811204572; Graphologie.
[272] Klages, Ludwig: *Handschrift und Charakter*; 28. Aufl.; 1982; Bouvier; Bonn; ISBN 3416003128; Gemeinverständlicher Abriss der graphologischen Technik.
[273] Bonert, Klaus W.; Bielkine, Helga; Hand, Robert: *Ephemeride 1850-2050*; 2., neu berechn. Aufl.; 1988; Astron; Hamburg; ISBN 3925822003; Der Asteroiden Ceres, Pallas, Juno, Vesta und von Cheiron, Isis.
[274] Ebertin, Reinhold: *Direktionen - Mitgestalter des Schicksals*; 12. Aufl.; 1988; Ebertin; Freiburg; ISBN 3871860700; Astrologie.
[275] Stein, Zane B.: *Chiron*; 2., erw. Aufl.; 1988; Chiron; Dusslingen; ISBN 3925100067; Astrologie.
[276] Rudhyar, Dane: *Das astrologische Häusersystem*; 3. Aufl.; 1984; Hugendubel; München; ISBN 3880340994; Das Spektrum der individuellen Erfahrung.
[277] Rohr, Richard; Ebert, Andreas: *Das Enneagramm*; 28. Aufl.; 1996; Claudius; München; ISBN 353262088X; Die 9 Gesichter der Seele.
[278] Wheeler, Mortimer: *Römische Kunst und Architektur*; 1. Aufl.; 1969; Droemer/Knaur; München; ASIN B0000BU5R7; Mit 215 Abbildungen, davon 60 in Farben.
[279] Sempé: *Wie das Leben so spielt*; 1. Aufl.; 1988; Diogenes; Zürich; ISBN 3257020244; Der gesellschaftliche Aufstieg des Monsieur Lambert.
[280] Boynton, Sandra: *Schokolade*; 1. Aufl.; 1984; DuMont; Köln; ISBN 377011522; Eine verzehrende Leidenschaft.
[281] Iding, Doris: *Für mehr Lebensenergie - Bewusstes Atmen*; 2. Aufl.; 2000; Südwest; München; ISBN 351706162X; Gesundheit und Vitalität mit der Atemtherapie.
[282] Denk, Roland: *Neue Segelschule*; 9., überarb. Aufl.; 1985; BLV Verlagsgesellschaft; München; ISBN 3405129915; Vom Anfänger zum Führerschein A/R.
[283] Organ, Maren (Übers.): *Fit, elastisch und gesund*; 17. Aufl.; 1989; Hoffmann & Campe; Hamburg; ISBN 3455020305; Das tägliche Training für jedermann.
[284] Pollay, Heinz: *Das Reiterabzeichen leicht gemacht*; 3., durchges. Aufl.; 1978; BLV Verlagsgesellschaft; München; ISBN 3405119316; und alles zum Thema Reiter-Pass (FN).
[285] Blake, Henry: *Versteh dein Pferd*; 3. Aufl.; 1976; Albert Müller; Rüschlikon-Zürich; ISBN 327500607X; Neue Wege der Verständigung.
[286] Fehringer, Otto: *Unser Pferd*; 2. Aufl.; 1960; Reimer; Berlin; ASIN B0000BHYJO; Das neue Pferdebuch für alle.
[287] Müseler, Wilhelm: *Reitlehre*; 43. Aufl.; 1977; Parey; Berlin; ASIN B0000BSRGN; Mit 95 Abbildungen.
[288] Blendinger, Wilhelm: *Psychologie und Verhaltensweisen des Pferdes*; 3. Aufl.; 1977; Hoffmann; Heidenheim; ISBN 3873433613; mit Vergleichen aus der Psychologie anderer Tiere und des Menschen.
[289] Linneweh, Klaus: *Kreatives Denken*; 6. Aufl.; 1994; Dieter Gitzel; Rheinzabern; ISBN 3921184223; Techniken und Organisation produktiver Kreativität.
[290] Golluch, Norbert; Kochan, Stano: *Das fröhliche Frauenhasserbuch*; 1. Aufl.; 1986; Eichborn; Frankfurt am Main; ISBN 3821818220; Humor.
[291] Mayer, Jeffrey J.: *Zeitmanagement für Dummies*; 2. Nachdruck; 1999; MITP; Bonn; ISBN 3826627601; mit CD-ROM.
[292] Metzig, Werner; Schuster, Martin: *Lernen zu lernen*; 4. Aufl.; 1998; Springer; Berlin; ISBN 3540646582; Lernstrategien wirkungsvoll einsetzen.
[293] Dobson, John H.: *Learn New Testament Greek*; 2nd Ed.; 1997; Bible Society; Swindon; ISBN 0564082252; with tape.
[294] Stock, Leo: *Langenscheidts Kurzgrammatik Altgriechisch*; 12. Aufl.; 2000; Langenscheidt; Berlin; ISBN 3468350309; Das Wichtigste aus der Grammatik mit praktischen Beispielen.
[295] Kaiser, Birgit (Bearb.): *Langenscheidts Grammatiktafel Französisch*; 5. Aufl.; 2000; Langenscheidt; Berlin; ISBN 3468361513; Eine konzentrierte und übersichtliche Darstellung der Grammatik.

[296] Buzan, Tony: *Speed Reading*; 6. Aufl.; 1999; MVG; Landsberg; ISBN 3478719607; Schneller lesen, mehr verstehen, besser behalten.
[297] Neges, Gertrud; Neges, Richard: *Kompaktwissen Management*; 2., überarb. und erw. Aufl.; 1999; Wirtschaftsverlag Ueberreuter; Wien; ISBN 3706405172; Alles, was Führungskräfte wissen müssen, mit vielen Fallbeispielen und Checklisten.
[298] ohne Angaben: *Die Geschichte der Familie*; 1. Aufl.; 1975; ECM; Freiburg/Schweiz; ohne ISBN; Moderne Familie.
[299] Emde-Naegelsbach, Barbara; Zeller, Alfred P. (Bearb.): *Sammeln macht Spaß*; 1. Aufl.; 1975; ECM; Freiburg/Schweiz; ohne ISBN; Moderne Familie.
[300] Weiß, Max: *Schach*; genehmigte Ausgabe; 1976; Buch und Zeit Verlagsgesellschaft; Köln; ohne ISBN; Einführung, Taktik, Musterspiele.
[301] Remarque, Erich Maria: *Im Westen nichts Neues*; 1. Aufl.; 1974; Ullstein; Berlin; ohne ISBN; Einführung von Hans Habe, Originalillustrationen von Gilbert Koull.
[302] Rochester, Jack B.; Gantz, John: *Der nackte Computer*; 1. Aufl.; 1984; DuMont; Köln; ISBN 3770116623; Für Laien und Fachleute, Kritiker und Enthusiasten - Erfinder, Rekorde, Geschichte, Fehler, Anekdoten, Fakten.
[303] Eiden, Christoph; Fiebelmann, Heinz; Kramer, Mike: *PC Hardware*; 1. Aufl.; 1997; BHV; Kaarst-Büttgen; ISBN 3893602682; Verstehen, Aufrüsten, Optimieren.
[304] Hansen, Hans Robert: *Wirtschaftsinformatik I*; 5., neubearb. und erw. Aufl.; 1986; Fischer; Stuttgart; ISBN 3437401726; Einführung in die betriebliche Datenverarbeitung.
[305] Göpfrich, Hans Rudolf: *Wirtschaftsinformatik II*; 3., völlig neubearb. und erw. Aufl.; 1988; Fischer; Stuttgart; ISBN 3437401971; Strukturierte Programmierung in COBOL.
[306] Hansen, Hans Robert: *Wirtschaftsinformatik I*; 6., neubearb. und stark erw. Aufl.; 1992; Fischer; Stuttgart; ISBN 3437402862; Einführung in die betriebliche Datenverarbeitung.
[307] Vester, Frederic: *Denken, Lernen, Vergessen*; 11. Aufl.; 1984; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3421026726; Was geht in unserem Kopf vor, wie lernt das Gehirn, und wann lässt es uns im Stich?.
[308] Bender, Hans: *Parapsychologie*; 28.-32. Tsd.; 1980; Fischer; Frankfurt am Main; ISBN 3596263166; Ihre Ergebnisse und Probleme.
[309] Döbereiner, Wolfgang: *Schütze*; 7. Aufl.; 1981; Wilhelm Heyne; München; ISBN 3453460162; 23. November - 21. Dezember.
[310] Eysenck, Hans Jürgen; Nias, David: *Astrologie*; 1. Aufl.; 1984; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423103507; Wissenschaft oder Aberglaube?.
[311] Prónay, Alexander von: *Die Sterne haben doch recht*; 1. Aufl.; 1982; Moewig; Hamburg; ISBN 381183164X; Astrologie.
[312] Weltenburger, Martin (Hrsg.): *Das persönliche Horoskop für alle, die am 25. August geboren sind*; 1. Aufl.; 1987; Das persönliche Geburtstagsbuch; München; ISBN 3818411581; Astrologie.
[313] Bear, Sun; Wabun: *Indianische Astrologie der Erde*; 1. Aufl.; 1986; Goldmann; München; ISBN 3442109779; 21. Mai - 20. Juni, Hirsch, Geboren unter dem Mond der Maisaussaat, Das Medizinrad.
[314] Weiss, C. Joachim: *Der Astrokalender 1987*; 1. Aufl.; 1986; Wilhelm Heyne; München; ISBN 3453417259; Ein Jahreshoroskop für alle Sternzeichen von Januar bis Dezember.
[315] Heath, Ian: *Das Jungfrau-Buch*; 1. Aufl.; 1985; Droemer/Knaur; München; ISBN 3426261715; Taschenbuch.
[316] Sakoian, Frances; Acker, Louis S.: *Das große Lehrbuch der Astrologie*; 4. Aufl.; 1982; Droemer/Knaur; München; ISBN 3426076071; Wie man Horoskope stellt und nach neuesten wissenschaftlichen Erkenntnissen Charakter und Schicksal deutet.
[317] ohne Angaben: *Die Deutsche Ephemeride V 1961-1970*; 6. Aufl.; 1982; Barth; München; ISBN 3502688052; Astrologie.
[318] Sargent, Lois Haines: *Partnerschaftsastrologie*; 1. Aufl.; 1988; Droemer/Knaur; München; ISBN 3426041847; Was Horoskope über Beziehungen zu Mitmenschen aussagen.
[319] Meyer, Hermann: *Partnerschaft, Gesundheit und Glück in der psychologischen Astrologie*; Genehmigte Taschenbuchausgabe; 1988; Wilhelm Heyne; München; ISBN 3453009371; Vorschläge zur eigenen Schicksalsgestaltung.
[320] Roscher, Michael: *Das Buch der Horoskope*; 1. Aufl.; 1990; Droemer/Knaur; München; ISBN 3426042347; 240 Horoskope bekannter Persönlichkeiten.
[321] Lundsted, Betty: *Astrologische Aspekte*; 1. Aufl.; 1988; Droemer/Knaur; München; ISBN 3426041825; Ihre weibliche und männliche Seite.
[322] Gauquelin, Michel: *Kosmische Einflüsse auf menschliches Verhalten*; 1. Aufl.; 1983; Hermann Bauer; Freiburg; ISBN 3762606064; esotera Taschenbücherei.

[323] ohne Angaben: *Alles über den Jungfrau-Menschen 24. August - 23. September*; 5. Aufl.; 1979; Moewig; Rastatt; ISBN 3811869922; Wesen und Verhalten in allen Lebenslagen.
[324] Dietrich, Eva: *Astro-Graphologie*; 1. Aufl.; 1981; Goldmann; München; ISBN 3442108586; Der neue Schlüssel zur Charakterdeutung und Selbsterkenntnis.
[325] Cobbaert, Anne-Marie: *Graphologie*; 1. Aufl.; 1982; Droemer/Knaur; München; ISBN 3426041022; Schriften erkennen und deuten, mit 273 Schriftproben im laufenden Text.
[326] Ehwald, Ursula; Lauster, Peter: *Handschriften deuten*; 1. Aufl.; 1976; Humboldt; München; ISBN 3581662744; So beurteilt die Graphologie den Charakter, mit Testfolgen und Tips.
[327] Schmid, Horst: *Biorhythmik*; Genehmigte Sonderausgabe; 1980; Buch und Zeit; Köln; ohne ISBN; Die neue Lebenshilfe, Höhen und Tiefen der persönlichen Lebenskurven vorausberechnen und danach handeln.
[328] Thurber, James: *Zehn goldene Regeln für das Zusammenleben/Der Hund, der die Leute biss*; 1. Aufl.; 1991; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499130505; Taschenbuch.
[329] Kratz, Hans-Jürgen: *Das Vorstellungsgespräch*; 1. Aufl.; 1996; Walhalla; Regensburg; ISBN 3802938402; Optimal vorbereitet auf Ihren Live-Auftritt.
[330] Oberbeil, Klaus: *Gesundheit aus der Natur - Biostoffe*; 1. Aufl.; 1998; Südwest; München; ISBN 3517080217; Mit Vitaminen, Mineralien, Spurenelementen, Enzymen und Bioflavonoiden viele Krankheiten heilen.
[331] Hargreaves, Gloria; Wilson, Peggy: *Die Schrift als Ausdruck der Persönlichkeit*; 1. Aufl.; 1985; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499179156; Ein graphologisches Handbuch von A-Z.
[332] Salny, Abbie; Grosswirth, Marvin: *Das endgültige Mensa-Quiz-Buch*; 1. Aufl.; 1987; DuMont; Köln; ISBN 3770117344; Für Genies und solche, die es werden wollen - mit Witz, Tempo und Wissen gegen den intelligentesten Club der Welt.
[333] Salberg-Steinhardt, Barbara: *Die Schrift: Geschichte - Gestaltung - Anwendung*; 1. Aufl.; 1983; DuMont; Köln; ISBN 377011454X; Ein Lern- und Lehrbuch für die Praxis.
[334] Butschkow, Peter: *Viel Spaß im Büro!*; 2. Aufl.; 1992; Lappan; Oldenburg; ISBN 3890824102; Cartoons.
[335] Gaymann, Peter: *Hühner auf Reisen*; 1. Aufl.; 1990; Wilhelm Heyne; München; ISBN 3453037022; Cartoons.
[336] Serebriakoff, Victor: *Mensa Quadrat*; 1. Aufl.; 1989; Wilhelm Heyne; München; ISBN 3453031105; Denksportaufgaben für Hochbegabte.
[337] Knieß, Michael: *Kreativitätstechniken*; 1. Aufl.; 2006; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423509066; Methoden und Übungen.
[338] Weisbach, Christian-Rainer: *Professionelle Gesprächsführung*; 4., überarb. und erw. Aufl.; 1999; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3432058455; Ein praxisnahes Lese- und Übungsbuch.
[339] Statistisches Bundesamt (Hrsg.): *Zahlenkompass*; 4. Aufl.; 1996; Metzler-Poeschel; Stuttgart; ISBN 3824604485; Statistisches Taschenbuch für Deutschland.
[340] Oheim, Gertrud: *Einmaleins des guten Tons*; 6. Aufl.; 1955; Bertelsmann; Gütersloh; ohne ISBN; Praktische Ratgeber.
[341] Schneider, Wolf: *Deutsch für Kenner*; 5. Aufl.; 2000; Piper; München; ISBN 3492222161; Die neue Stilkunde.
[342] Buchholz, Kai (Hrsg.): *Liebe*; 1. Aufl.; 2007; Goldmann; München; ISBN 3442077567; Ein philosophisches Lesebuch.
[343] Schmitt, Anton: *Führer durch Fulda*; 14. Aufl.; 1995; Parzeller; Fulda; ISBN 3790002585; Mit Planskizze und zahlreichen Abbildungen.
[344] Reincke, Madeleine (Bearb.): *Großbritannien und Nordirland*; 7. Aufl.; 1998; Baedeker; Ostfildern; ISBN 3875045068; Reiseführer mit großer Reisekarte.
[345] Abend, Bernhard; Schliebitz, Anja: *Schweiz*; 11. Aufl.; 2004; Baedeker; Ostfildern; ISBN 3875045211; Reiseführer mit großer Reisekarte.
[346] Beck, Vera; Bernhard, Marianne; Eisenschmid, Rainer; Reincke, Madelein: *Berlin*; 13. Aufl.; 2000; Baedeker; Ostfildern; ISBN 3875041267; Reiseführer mit großem Stadtplan.
[347] Bauer, E.-G.; Eisenschmid, Rainer; Grünewald, Margit et al.: *Dresden*; 10. Aufl.; 2006; Baedeker; Ostfildern; ISBN 3829710275; Reiseführer mit großem Cityplan.
[348] Beck, Vera; Branscheid, Barbara; Galenschovski, Carmen et al.: *Frankfurt am Main*; 6. Aufl.; 1998; Baedeker; Ostfildern; ISBN 3895251437; Reiseführer mit großem Stadtplan.
[349] Kelch, Johannes; Linde, Helmut et al.: *München*; 9. Aufl.; 2000; Baedeker; Ostfildern; ISBN 3875041275; Reiseführer mit großem Stadtplan.
[350] Bourmer, Achim; Eisenschmid, Rainer; Schliebitz, Anja et al.: *New York*; 8. Aufl.; 1998; Baedeker; Ostfildern; ISBN 3895258105; Reiseführer mit großem Stadtplan.

[351] Reincke, Madeleine (Bearb.): *Paris*; 10. Aufl.; 1999; Baedeker; Ostfildern; ISBN 3875040597; Reiseführer mit großer Reisekarte.
[352] Reincke, Madeleine (Bearb.): *Rom*; 10. Aufl.; 1998; Baedeker; Ostfildern; ISBN 3875041259; Reiseführer mit großem Stadtplan.
[353] Branscheid, Barbara; Bourmer, Achim; Luippold, Dieter et al.: *Rügen - Hiddensee*; 5. Aufl.; 2003; Baedeker; Ostfildern; ISBN 3895254363; Reiseführer mit großer Inselkarte.
[354] Galenschovski, Carmen; Reincke, Madeleine et al.: *Wien*; 11. Aufl.; 2002; Baedeker; Ostfildern; ISBN 3875041321; Reiseführer mit großem Cityplan.
[355] Höh, Peter: *Insel Usedom*; 1. Aufl.; 2001; Reise Know-How; Bielefeld; ISBN 3894166916; Urlaubshandbuch.
[356] Nicholson, Robert; Barber, Romek (Des.): *Colour London Streetfinder*; 1st Ed.; 1991; Nicholson; London; ISBN 0702816884; Spiral Bound.
[357] Leech, Michael: *New York*; Überarb. Ausg.; 1997; Könemann; Köln; ISBN 389508879X; Reiseführer.
[358] Geiss, Heide Marie Karin: *München*; 5., akt. Aufl.; 2000; DuMont; Köln; ISBN 377012670X; Reise-Taschenbuch.
[359] Sorges, Jürgen: *Rom*; Kompl. akt. Aufl.; 2000; Polyglott; München; ISBN 3493597088; Reiseführer.
[360] Redell, August (Hrsg.): *Norderney erzählt*; 2. Aufl.; 1995; Hansen & Hansen; Münsterdorf; ISBN 3879803056; Geschichten, Anekdoten, Erinnerungen.
[361] Stiemert, Elisabeth; Schmidt, Waltraut: *Kater Timtetater*; 1. Aufl.; 1986; Gerstenberg; Hildesheim; ISBN 3806740577; Taschenbuch.
[362] Clark, Elisabeth: *Das Eselchen und der Weihnachtsmann*; 1. Aufl.; 1998; Coppenrath; Münster; ISBN 3815717086; Illustriert von Jan Ormerod.
[363] Weis, Erich (Bearb.): *Grund- und Aufbauwortschatz Englisch*; 1. Aufl.; 1989; Klett; Stuttgart; ISBN 3125195101; Taschenbuch.
[364] Schäfer, Karl-Heinz; Zimmermann, Bernhard (Bearb.): *Langenscheidts Taschenwörterbuch Altgriechisch*; 7. Aufl.; 1998; Langenscheidt; Berlin; ISBN 3468100310; Altgriechisch - Deutsch, Deutsch - Altgriechisch.
[365] Pertsch, Erich (Bearb.): *Langenscheidts Taschenwörterbuch Lateinisch*; 29. Aufl.; 1980; Langenscheidt; Berlin; ISBN 3469102003; Lateinisch - Deutsch, Deutsch - Lateinisch.
[366] Lange-Kowal, Ernst Erwin (Bearb.): *Langenscheidts Schulwörterbuch Französisch*; 12. Aufl.; 1981; Langenscheidt; Berlin; ISBN 346813150X; Französisch - Deutsch, Deutsch - Französisch.
[367] Fuchs, Sebastian; Wenzel, Veronika (Bearb.): *Langenscheidts Universal-Sprachführer Niederländisch*; 1. Aufl.; 1998; Langenscheidt; Berlin; ISBN 3468232306; Praktische Redewendungen und Wörter für die Reise.
[368] Dierkes, Hans (Hrsg.): *Philosophische Anthropologie*; 1. Aufl.; 1995; Reclam; Stuttgart; ISBN 3150150124; Arbeitstexte für den Unterricht.
[369] Leibniz, Gottfried Wilhelm: *Monadologie*; 1. Aufl.; 1998; Reclam; Stuttgart; ISBN 3150078539; Französisch/Deutsch.
[370] Aristoteles: *Nikomachische Ethik*; 1. Aufl.; 1999; Reclam; Stuttgart; ISBN 3150085861; Übersetzung und Nachwort von Franz Dirlmeier.
[371] Sainsbury, R. M.: *Paradoxien*; 1. Aufl.; 1994; Reclam; Stuttgart; ISBN 315008881X; Aus dem Englischen übersetzt von Vincent C. Müller.
[372] Kant, Immanuel: *Die Religion innerhalb der Grenzen der bloßen Vernunft*; 1. Aufl.; 2004; Reclam; Stuttgart; ISBN 3150012317; Hrsg. von Rudolf Malter.
[373] Heidegger, Martin: *Der Ursprung des Kunstwerkes*; 1. Aufl.; 1997; Reclam; Stuttgart; ISBN 3150084466; Mit einer Einführung von Hans-Georg Gadamer.
[374] Aristoteles: *Metaphysik*; Bibliograph. erg. Ausg.; 1997; Reclam; Stuttgart; ISBN 3150079136; Übersetzt und herausgegeben von Franz F. Schwarz.
[375] Martens, Ekkehard: *Zwischen Gut und Böse*; 1. Aufl.; 1997; Reclam; Stuttgart; ISBN 3150096359; Elementare Fragen angewandter Philosophie.
[376] Peirce, Ch. S.; James, W.; Schiller, F. C. S.; Dewey, J.: *Pragmatismus*; 1. Aufl.; 1997; Reclam; Stuttgart; ISBN 3150097991; Mit einer Einleitung herausgegeben von Ekkehard Martens.
[377] Strawson, Peter Frederick: *Einzelding und logisches Subjekt (Individuals)*; 1. Aufl.; 1995; Reclam; Stuttgart; ISBN 3150094100; Ein Beitrag zur deskriptiven Metaphysik.
[378] Konfuzius: *Gespräche*; 1. Aufl.; 2002; Reclam; Stuttgart; ISBN 3150096561; Aus dem Chinesischen übersetzt und herausgegeben von Ralf Moritz.
[379] Mittelstraß, Jürgen (Hrsg.): *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie Band 1: A-G*; Unveränd. Sonderausg.; 2004; Metzler; Stuttgart; ISBN 3476020126; Lexikon.
[380] Mittelstraß, Jürgen (Hrsg.): *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie Band 2: H-O*; Unveränd. Sonderausg.; 2004; Metzler; Stuttgart; ISBN 3476020126; Lexikon.

[381] Mittelstraß, Jürgen (Hrsg.): *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie Band 3: P-So*; Unveränd. Sonderausg.; 2004; Metzler; Stuttgart; ISBN 3476020126; Lexikon.
[382] Mittelstraß, Jürgen (Hrsg.): *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie Band 4: Sp-Z*; Unveränd. Sonderausg.; 2004; Metzler; Stuttgart; ISBN 3476020126; Lexikon.
[383] Inwood, Michael: *Heidegger*; 1. Aufl.; 2004; Herder; Freiburg; ISBN 3926642467; Spektrum Meisterdenker.
[384] Nishitani, Keiji: *Was ist Religion?*; 1. Aufl.; 2001; Insel; Frankfurt am Main; ISBN 3458344292; Taschenbuch.
[385] Möbuß, Susanne: *Plotin*; 1. Aufl.; 2005; Panorama; Wiesbaden; ISBN 3926642637; Große Denker.
[386] Martin, Gottfried: *Platon*; 46.-50. Tsd.; 1980; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499501503; in Selbstzeugnissen und Bilddokumenten.
[387] Bloch, Ernst; Herzfelde, Wieland: *Briefwechsel 1938-1949*; 1. Aufl.; 2001; Suhrkamp; Frankfurt am Main; ISBN 3518582593; Wir haben das Leben wieder vor uns.
[388] Mainzer, Klaus: *Computerphilosophie zur Einführung*; 1. Aufl.; 2003; Junius; Hamburg; ISBN 3885063832; Taschenbuch.
[389] Machiavelli, Niccolò: *Der Fürst*; 1. Aufl.; 1990; Insel; Frankfurt am Main; ISBN 3458329072; Taschenbuch.
[390] Pauen, Michael; Roth, Gerhard (Hrsg.): *Neurowissenschaften und Philosophie*; 1. Aufl.; 2001; Fink; München; ISBN 3770535480; Eine Einführung.
[391] Buhr, Manfred; Kosing, Alfred: *Kleines Wörterbuch der marxistisch-leninistischen Philosophie*; 2., überarb. und erw. Aufl.; 1974; Dietz; Berlin; ohne ISBN; gebunden.
[392] Jaspers, Karl: *Die großen Philosophen*; 6. Aufl.; 1997; Piper; München; ISBN 3492210023; Erster Band.
[393] Alquié, Ferdinand: *Plans de philosophie générale*; 1. Aufl.; 2000; La Table Ronde; Paris; ISBN 2710309955; Taschenbuch.
[394] Wittgenstein, Ludwig: *Tractatus logico-philosophicus/Philosophische Untersuchungen*; 1. Aufl.; 1990; Reclam; Leipzig; ISBN 3379006483; Taschenbuch.
[395] Kranz, Walther: *Die griechische Philosophie*; Lizenzausg.; 1997; Dieterich; Leipzig; ISBN 388059922X; Zugleich eine Einführung in die Philosophie überhaupt.
[396] Peirce, Charles Sanders: *Vorlesungen über Pragmatismus*; 1. Aufl.; 1991; Meiner; Hamburg; ISBN 3787309845; Mit Einleitung und Anmerkungen neu herausgegeben von Elisabeth Walther.
[397] Brentano, Franz: *Philosophische Untersuchungen zu Raum, Zeit und Kontinuum*; 1. Aufl.; 1976; Meiner; Hamburg; ISBN 3787303561; Aus dem Nachlass mit Anmerkungen von Alfred Kastil herausgegeben und eingeleitet von Stephan Körner und Roderick M. Chrisholm.
[398] Luckner, Andreas: *Martin Heidegger: "Sein und Zeit"*; 1. Aufl.; 1997; Schöningh; Paderborn; ISBN 350699476X; Ein einführender Kommentar.
[399] Birnbacher, Dieter; Hoerster, Norbert (Hrsg.): *Texte zur Ethik*; 5. Aufl.; 1984; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423060425; dtv Bibliothek.
[400] Hofmeister, Heimo: *Philosophisch denken*; 2., durchges. Aufl.; 1997; Vandenhoeck & Ruprecht; Göttingen; ISBN 3525032757; Taschenbuch.
[401] Heidegger, Martin; Jaspers, Karl: *Briefwechsel 1920-1963*; 1. Aufl.; 1992; Piper; München; ISBN 3492112609; Mit 4 Abbildungen auf Tafeln.
[402] Kunzmann, Peter; Burkard, Franz-Peter; Wiedmann, Franz: *dtv-Atlas zur Philosophie*; 2. Aufl.; 1992; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423032294; Tafeln und Texte, mit 111 farbigen Abbildungsseiten.
[403] Platon: *Menon/Kratylos/Euthydemos/Hippias maior*; 1. Aufl.; 1991; Insel; Frankfurt am Main; ISBN 3458331034; Griechisch und Deutsch.
[404] Warning, Rainer: *Rezeptionsästhetik*; 4., unveränd. Aufl.; 1993; Fink; München; ISBN 3770510534; Theorie und Praxis.
[405] Hügli, Anton; Lübcke, Poul (Hrsg.): *Philosophielexikon*; 2. Aufl.; 1998; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499554534; Personen und Begriffe der abendländischen Philosophie von der Antike bis zur Gegenwart.
[406] Hegenbart, Rainer: *Wörterbuch der Philosophie*; 1. Aufl.; 1984; Humboldt; München; ISBN 3581664852; Das unentbehrliche Nachschlagewerk über Begriffe und Persönlichkeiten der Philosophie, über 1500 Stichwörter.
[407] Lutz, Bernd (Hrsg.): *Die großen Philosophen des 20. Jahrhunderts*; 1. Aufl.; 1999; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423325178; Biographisches Lexikon.
[408] Höffe, Otfried: *Aristoteles*; 2., überarb. Aufl.; 1999; C. H. Beck; München; ISBN 3406419607; Mit 7 Abbildungen.
[409] Kant, Immanuel: *Kritik der reinen Vernunft*; 1. Aufl.; 1998; Meiner; Hamburg; ISBN 3787313192; Nach der 1. und 2. Orig.-Ausg. hrsg. von Jens Timmermann. Mit einer Bibliographie von Heiner Klemme.

[410] Kant, Immanuel: *Grundlegung zur Metaphysik der Sitten*; 1. Aufl.; 1999; Meiner; Hamburg; ISBN 3787314431; Mit einer Einleitung hrsg. von Bernd Kraft und Dieter Schönecker.
[411] Hegel, Georg Wilhelm Friedrich: *Phänomenologie des Geistes*; 1. Aufl.; 1988; Meiner; Hamburg; ISBN 3787307699; Mit einer Einleitung von Wolfgang Bonsiepen.
[412] Fetscher, Iring: *Marx*; 1. Aufl.; 2004; Panorama; Wiesbaden; ISBN 3926642483; Spektrum Meisterdenker.
[413] Gardiner, Patrick: *Kierkegaard*; 1. Aufl.; 2004; Panorama; Wiesbaden; ISBN 3926642319; Spektrum Meisterdenker.
[414] Tanner, Michael: *Nietzsche*; 1. Aufl.; 2004; Panorama; Wiesbaden; ISBN 3926642459; Spektrum Meisterdenker.
[415] Möbuß, Susanne: *Sartre*; 1. Aufl.; 2004; Panorama; Wiesbaden; ISBN 3926642300; Spektrum Meisterdenker.
[416] Roth, Gerhard: *Fühlen, Denken, Handeln*; 1. Aufl.; 2003; Suhrkamp; Frankfurt am Main; ISBN 3518292781; Wie das Gehirn unser Verhalten steuert.
[417] Andersen, Svend: *Einführung in die Ethik*; 1. Aufl.; 2000; Walter de Gruyter; Berlin; ISBN 3110150735; Studienbuch.
[418] Eliade, Mircea: *Die Religionen und das Heilige*; 1. Aufl.; 1998; Insel; Frankfurt am Main; ISBN 345833887X; Elemente der Religionsgeschichte.
[419] Dalai Lama: *Einführung in den Buddhismus*; 16. Aufl.; 2001; Herder; Freiburg; ISBN 3451049465; Die Harvard-Vorlesungen.
[420] Hillebrandt, Alfred (Übers.): *Upanishaden*; 47.-49. Tsd.; 1990; Diederichs; München; ISBN 3424005754; Die Geheimlehre der Inder.
[421] Kennedy, Alex: *Was ist Buddhismus?*; 1. Aufl.; 1985; Goldmann; München; ISBN 3442123968; Lehre und Weltsicht einer großen geistigen Tradition, die heute auch das westliche Denken beeinflusst.
[422] Rinpoche, Sogyal: *Funken der Erleuchtung*; 1. Aufl.; 1995; Bertelsmann; Rheda-Wiedenbrück; ohne ISBN; Buddhistische Weisheit für jeden Tag des Jahres.
[423] Esposito, John L.: *Von Kopftuch bis Scharia*; 3. Aufl.; 2004; Reclam; Leipzig; ISBN 3379201057; Was man über den Islam wissen sollte.
[424] Engemann, Wilfried: *Einführung in die Homiletik*; 1. Aufl.; 2002; Francke; Tübingen; ISBN 3772022774; Taschenbuch.
[425] England, Roger; Bancroft, Anne (Hrsg.): *Spirituelle Kostbarkeiten*; 1. Aufl.; 2002; Hermann Bauer; Freiburg; ISBN 3762608652; Zen.
[426] Lechner, Odilo: *Engel*; 1. Aufl.; 2004; Wilhelm Heyne; München; ISBN 3453879449; Begegnungen mit Gottes Boten.
[427] Wachtturm Bibel- und Traktat-Gesellschaft (Hrsg.): *Die Suche der Menschheit nach Gott*; 1. Aufl.; 1990; Wachtturm-Gesellschaft; Selters; ohne ISBN; Religion.
[428] Wehr, Gerhard: *Europäische Mystik*; Genehmigte Lizenzausg.; 2005; Panorama; Wiesbaden; ISBN 3926642548; Eine Einführung.
[429] Schweer, Thomas; Rink, Steffen: *Benedikt XVI.*; 1. Aufl.; 2005; Ullstein; Berlin; ISBN 354836828X; Der deutsche Papst.
[430] Dalai Lama: *Der Wille zum Frieden*; 1. Aufl.; 2005; Fischer; Frankfurt am Main; ISBN 3596167221; Taschenbuch.
[431] Knoblauch, Hubert: *Religionssoziologie*; 1. Aufl.; 1999; Walter de Gruyter; Berlin; ISBN 3110163470; Sammlung Göschen 2094.
[432] Largier, Niklaus (Übers.): *Das Buch von der geistigen Armut*; 1. Aufl.; 1989; Artemis; Zürich; ISBN 3760807461; Eine mittelalterliche Unterweisung zum vollkommenen Leben.
[433] Schumann, Hans Wolfgang: *Die großen Götter Indiens*; 1. Aufl.; 2004; Hugendubel; Kreuzlingen; ISBN 3896314297; Grundzüge von Hinduismus und Buddhismus.
[434] Gunturu, Vanamali: *Hinduismus*; 1. Aufl.; 2002; Hugendubel; Kreuzlingen; ISBN 3720523446; Taschenbuch.
[435] Ess, Hans van: *Der Konfuzianismus*; 1. Aufl.; 2003; C. H. Beck; München; ISBN 3406480063; Mit 4 Abbildungen und 1 Karte.
[436] Hasenfratz, Hans-Peter: *Religion - was ist das?*; 1. Aufl.; 2002; Herder; Freiburg; ISBN 3451053225; Lebensorientierung und Andere Wirklichkeit.
[437] Vinzent, Markus (Hrsg.): *Theologen*; 1. Aufl.; 2004; Metzler; Stuttgart; ISBN 3476020258; 185 Porträts von der Antike bis zur Gegenwart.
[438] Steinseifer, Wolfgang (Hrsg.): *Die Bibel auf einen Blick*; 1. Aufl.; 2004; Brockhaus; Wuppertal; ISBN 3417206472; Taschenbuch.
[439] Härle, Wilfried: *Dogmatik*; 2., überarb. Aufl.; 2000; Walter de Gruyter; Berlin; ISBN 3110165899; Lehrbuch.

[440] Drosdowski, Günther (Hrsg.): *Duden, Die deutsche Rechtschreibung Band 1*; 21., völlig neu bearb. und erw. Aufl.; 1996; Dudenverlag; Mannheim; ISBN 3411040114; Auf der Grundlage der neuen amtlichen Rechtschreibregeln.
[441] Auberle, Anette; Klosa, Annette (Bearb.): *Duden, Herkunftswörterbuch Band 7*; 3., völlig neu bearb. und erw. Aufl.; 2001; Dudenverlag; Mannheim; ISBN 3411040734; Etymologie der deutschen Sprache.
[442] Eickhoff, Birgit; Haller-Wolf, Angelika; Klosa, Annette et al. (Bearb.): *Duden, Das Bedeutungswörterbuch Band 10*; 3., neu bearb. und erw. Aufl.; 2002; Dudenverlag; Mannheim; ISBN 341104103X; Wortbildung und Wortschatz.
[443] Baumgärtner, Klaus; Steger, Hugo et al.: *Funk-Kolleg Sprache 1*; 128.-130. Tsd.; 1985; Fischer; Frankfurt am Main; ISBN 3596261112; Eine Einführung in die moderne Linguistik.
[444] Baumgärtner, Klaus; Steger, Hugo et al.: *Funk-Kolleg Sprache 2*; 106.-107. Tsd.; 1986; Fischer; Frankfurt am Main; ISBN 3596261120; Eine Einführung in die moderne Linguistik.
[445] Gerhardt, Rudolf; Leyendecker, Hans: *Lesebuch für Schreiber*; 1. Aufl.; 2005; Fischer; Frankfurt am Main; ISBN 3596164117; Vom richtigen Umgang mit der Sprache und von der Kunst des Zeitunglesens.
[446] Franck, Norbert: *Schreiben wie ein Profi*; 4., überarb. und erw. Aufl.; 2005; Bund-Verlag; Frankfurt am Main; ISBN 3766335952; Leitfaden für Texte mit Pfiff und Struktur.
[447] Berkenbusch, Eckhard: *Praktisches Chinesisch I*; 1. Aufl.; 1994; Kommerzieller Verlag; Peking; ISBN 7100016754; Lehrbuch.
[448] Berkenbusch, Eckhard: *Praktisches Chinesisch II*; 1. Aufl.; 1994; Kommerzieller Verlag; Peking; ISBN 7100016827; Lehrbuch.
[449] Wingen, Hans: *Wörterbuch Deutsch - Esperanto*; 2. Nachdruck; 1984; Olms; Hildesheim; ISBN 3487070804; Taschenbuch.
[450] Grosjean-Maupin, E.: *Plena Vortaro de Esperanto kun Suplemento*; 9. Aufl.; 1980; Sennacieca Asocio Tutmonda; Paris; ohne ISBN; Suplemento kompilita de Prof. G. Waringhien.
[451] Sieber, Helmut: *Mathematische Begriffe und Formeln*; 1. Aufl.; 1973; Klett; Stuttgart; ISBN 3127124007; Formelsammlung.
[452] Laugwitz, Detlef: *Zahlen und Kontinuum*; Unveränd. Nachdruck; 1994; Bibliographisches Institut; Mannheim; ISBN 341103128X; Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik Band 5.
[453] Lorenzen, Paul: *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie*; 1. Aufl.; 1987; Bibliographisches Institut; Mannheim; ISBN 3411031549; gebunden.
[454] Ebbinghaus, Heinz-Dieter; Flum, Jörg; Thomas, Wolfgang: *Einführung in die mathematische Logik*; 3., vollst. überarb. und erw. Aufl.; 1992; Bibliographisches Institut; Mannheim; ISBN 3411156031; Mathematik.
[455] Scheid, Harald: *Zahlentheorie*; 1. Aufl.; 1991; Bibliographisches Institut; Mannheim; ISBN 3411148411; Mathematik.
[456] Scheid, Harald: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*; 1. Aufl.; 1992; Bibliographisches Institut; Mannheim; ISBN 3411158417; Mathematische Texte Band 6.
[457] Lüneburg, Heinz: *Vorlesungen über Lineare Algebra*; 1. Aufl.; 1993; Bibliographisches Institut; Mannheim; ISBN 3411161515; Versehen mit der zu ihrem Verständnis nötigen Algebra sowie einigen Bemerkungen zu ihrer Didaktik.
[458] Ebbinghaus, Heinz-Dieter: *Einführung in die Mengenlehre*; 4. Aufl.; 2003; Spektrum Akademischer Verlag; Heidelberg; ISBN 3827414113; Mathematik.
[459] Wirth, Niklaus: *Algorithmen und Datenstrukturen mit Modula-2*; 4., neubearb. und erw. Aufl.; 1986; Teubner; Stuttgart; ISBN 3519022605; Mit zahlreichen Figuren, Tabellen, Übungen und Programmen.
[460] Brandstädt, Andreas: *Graphen und Algorithmen*; 1. Aufl.; 1994; Teubner; Stuttgart; ISBN 3519021315; Mit zahlreichen Abbildungen.
[461] Schwarz, Hans Rudolf: *Methode der finiten Elemente*; 2., überarb. und erw. Aufl.; 1984; Teubner; Stuttgart; ISBN 3519123495; Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Rechenpraxis.
[462] Collatz, Lothar: *Differentialgleichungen*; 6., überarb. und erw. Aufl.; 1981; Teubner; Stuttgart; ISBN 3519220334; Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen.
[463] Beisel, Ernst-Peter; Mendel, Manfred: *Optimierungsmethoden des Operations Research Band 1*; 1. Aufl.; 1987; Vieweg; Braunschweig; ISBN 3528089768; Lineare und ganzzahlige Optimierung.
[464] Beisel, Ernst-Peter; Mendel, Manfred: *Optimierungsmethoden des Operations Research Band 2*; 1. Aufl.; 1991; Vieweg; Braunschweig; ISBN 3528063076; Optimierung in Graphen.
[465] Heuser, Harro: *Funktionalanalysis*; 2., neubearb. und erw. Aufl.; 1986; Teubner; Stuttgart; ISBN 3519122065; Theorie und Anwendung.
[466] Lavine, Shaughan: *Unerstanding the Infinite*; 2nd printing; 1998; Harvard University Press; Cambridge; ISBN 0674921178; Includes bibliographical references and index.
[467] Eisenreich, Günther; Sube, Ralf: *Dictionary of Mathematics - Wörterbuch Mathematik*; 1. Aufl.; 1987; Harri Deutsch; Thun; ISBN 3871449393; mit etwa 35000 Wortstellen, zweisprachige Studentenausgabe.

[468] Kosmol, Peter: *Optimierung und Approximation*; 1. Aufl.; 1991; Walter de Gruyter; Berlin; ISBN 3110123630; Lehrbuch.
[469] Kowalsky, Hans-Joachim: *Lineare Algebra*; 9., überarb. und erw. Aufl.; 1979; Walter de Gruyter; Berlin; ISBN 3110081644; Mathematik.
[470] Beyer, Otfried; Gottwald, Siegfried; Schlosser, Hartmut et al.: *Kleine Enzyklopädie Mathematik*; Nachdruck der 2., völlig überarb. Aufl.; 1980; Harri Deutsch; Thun; ISBN 3871443239; gebunden.
[471] Bosch, Siegfried: *Algebra*; 1. Aufl.; 1993; Springer; Berlin; ISBN 3540568336; Mathematik.
[472] Walter, Wolfgang: *Analysis 1*; 3., verb. Aufl.; 1992; Springer; Berlin; ISBN 3540552340; Mit 145 Abbildungen.
[473] Remmert, Reinhold: *Funktionentheorie 1*; 3., verb. Aufl.; 1992; Springer; Berlin; ISBN 3540552332; Mit 70 Abbildungen.
[474] Remmert, Reinhold: *Funktionentheorie 2*; 1. unveränd. Nachdruck der 1. Aufl.; 1992; Springer; Berlin; ISBN 3540553843; Mit 19 Abbildungen.
[475] Rollnik, Horst: *Quantentheorie 1*; 2. Aufl.; 2003; Springer; Berlin; ISBN 3540437886; Grundlagen, Wellenmechanik, Axiomatik.
[476] Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar: *Bausteine des Chaos*; Dt. Erstausg.; 1998; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499602504; Fraktale.
[477] Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar: *Chaos*; Dt. Erstausg.; 1998; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499605511; Bausteine der Ordnung.
[478] Kröber, Karl Günter: *Ein Esel lese nie*; 1. Aufl.; 2003; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3499615762; Mathematik der Palindrome.
[479] Granados, Gilberto; Gurgsdies, Erik: *Lern- und Arbeitsbuch Ökonomie*; 1. Aufl.; 1999; Dietz; Bonn; ISBN 3801202704; Wirtschaft.
[480] ohne Angaben: *BGB - Das Bürgerliche Gesetzbuch*; 1. Aufl.; 1991; Goldmann; München; ISBN 3442136326; Der vollständige Text mit Kommentaren und Beispielen.
[481] Anzenbacher, Arno: *Einführung in die Philosophie*; Nachdr. der 3., verb. Aufl.; 1989; Herder; Wien; ISBN 3210246270; Lizenzausgabe des gleichnamigen Schulbuchs.
[482] Völkel, Michael: *Das Lexikon der TV-Moderatoren*; 1. Aufl.; 2003; Schwarzkopf & Schwarzkopf; Berlin; ISBN 3896025244; Anekdoten, Fakten und Sprüche aus 50 Jahren TV-Geschichte.
[483] Störig, Hans Joachim: *Abenteuer Sprache*; 2. Aufl.; 2003; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 342330863X; Ein Streifzug durch die Sprachen der Erde.
[484] Hermann, Ursula; Rüme, Klaus; Raum, Norbert (Bearb.): *Wahrig Fremdwörterlexikon*; Sonderausg.; 1987; Orbis; München; ISBN 3570026817; Vorwort von Gerhard Wahrig.
[485] Möller, Christian: *Einführung in die Praktische Theologie*; 1. Aufl.; 2004; Francke; Tübingen; ISBN 3772030122; Taschenbuch.
[486] Schnelle, Udo: *Einleitung in das Neue Testament*; 5., durchges. Aufl.; 2005; Vandenhoeck & Ruprecht; Göttingen; ISBN 3525032382; Taschenbuch.
[487] Kreiner, Armin: *Gott im Leid*; Erw. Neuausg.; 2005; Herder; Freiburg; ISBN 3451286246; Zur Stichhaltigkeit der Theodizee-Argumente.
[488] Eliade, Mircea: *Geschichte der religiösen Ideen Band 1*; 1. Aufl.; 2002; Herder; Freiburg; ISBN 3451052741; Von der Steinzeit bis zu den Mysterien von Eleusis.
[489] Eliade, Mircea: *Geschichte der religiösen Ideen Band 2*; 1. Aufl.; 2002; Herder; Freiburg; ISBN 3451052741; Von Gautama Buddha bis zu den Anfängen des Christentums.
[490] Eliade, Mircea: *Geschichte der religiösen Ideen Band 3*; 1. Aufl.; 2002; Herder; Freiburg; ISBN 3451052741; Von Mohammed bis zum Beginn der Neuzeit.
[491] Eliade, Mircea: *Geschichte der religiösen Ideen Band 4*; 1. Aufl.; 2002; Herder; Freiburg; ISBN 3451052741; Vom Zeitalter der Entdeckungen bis zur Gegenwart.
[492] Volpi, Franco (Hrsg.): *Großes Werklexikon der Philosophie Band 1: A bis K*; Jubiläumsausg.; 2004; Kröner; Stuttgart; ISBN 3520839016; gebunden.
[493] Volpi, Franco (Hrsg.): *Großes Werklexikon der Philosophie Band 2: L bis Z*; Jubiläumsausg.; 2004; Kröner; Stuttgart; ISBN 3520839016; gebunden.
[494] Fontana, David: *Kursbuch Meditation*; 1. Aufl.; 1994; Barth; München; ISBN 350262187X; Alles über die verschiedenen Meditationstechniken und ihre Anwendung, Anleitungen zur Wahl der geeigneten Methode.
[495] Ortberg, John: *Jeder ist normal, bis du ihn kennen lernst*; 4. Aufl.; 2005; Gerth Medien; Asslar; ISBN 3865910432; Wie zwischenmenschliche Beziehungen gelingen.
[496] ohne Angaben: *Katechismus der Katholischen Kirche*; 1. Aufl.; 2005; Pattloch; München; ISBN 3629021409; Kompendium.
[497] Grom, Bernhard: *Religionspsychologie*; 1. Aufl.; 1992; Kösel; München; ISBN 3466203589; auch Vandenhoeck & Ruprecht.

[498] Lanoo (Christian Anders): *Der Sinn des Lebens - Nirvana Band 1*; 1. Aufl.; 2000; Books on Demand; Norderstedt; ISBN 3898114295; Buddhismus wie er sein sollte und esoterische Wissenschaften.
[499] Lanoo (Christian Anders): *Der Sinn des Lebens - Nirvana Band 2*; 1. Aufl.; 2000; Books on Demand; Norderstedt; ISBN 3898114309; Buddhismus wie er sein sollte und esoterische Wissenschaften.
[500] Wilber, Ken: *Integrale Spiritualität*; 1. Aufl.; 2007; Kösel; München; ISBN 9783466345090; Spirituelle Intelligenz rettet die Welt.
[501] Hawkins, David R.: *Die Ebenen des Bewusstseins*; 5. Aufl.; 2006; VAK; Kirchzarten; ISBN 3932098021; Von der Kraft, die wir ausstrahlen.
[502] Hofmeister, Klaus; Bauerochse, Lothar (Hrsg.): *Viele Stimmen - eine Sprache*; 1. Aufl.; 2001; Echter; Würzburg; ISBN 3429023823; Beten in den Weltreligionen.
[503] Scherhag, Richard; Blüthgen, Joachim; Lauer, Wilhelm: *Klimatologie*; 9., verb. Aufl.; 1977; Westermann; Braunschweig; ISBN 3141602840; Geographie.
[504] Grix, Rolf; Knöll, Wilhelm: *Lernfeld Gesellschaft*; 3. Aufl.; 1975; Diesterweg; Frankfurt am Main; ISBN 3425016679; Lehr- und Arbeitsbuch für den politischen Unterricht.
[505] Görgens, Alfred: *Kulinarisches Solo*; 1. Aufl.; 1991; Falken; Niedernhausen; ISBN 3806811547; Gerichte für eine Person.
[506] Hinz, Thomas: *Aquarellmalerei*; Nachaufl.; 1983; Falken; Niedernhausen; ISBN 3806850992; Materialien, Techniken, Motive.
[507] Dawkins, Richard: *Der Gotteswahn*; 1. Aufl.; 2007; Ullstein; Berlin; ISBN 9783550086885; gebunden.
[508] Hawkins, David R.: *Das All-sehende Auge*; 3. Aufl.; 2006; Sheema-Medien; Wasserburg; ISBN 3931560198; gebunden.
[509] Hawkins, David R.: *Licht des Alls*; 1. Aufl.; 2006; Sheema-Medien; Wasserburg; ISBN 3931560201; Die Wirklichkeit des Göttlichen.
[510] Renftel, Lars-Oliver; Schaffer-Hartmann, Richard (Hrsg.): *Hanau*; 1. Aufl.; 2002; CoCon; Hanau; ISBN 3928100920; Geschichte, Kultur, Gegenwart.
[511] Sach, Jacky; Faust, Jessica: *Zen*; 1. Aufl.; 2004; Lotos; München; ISBN 3778781669; Entspannung für Körper und Geist, Kraft und Frieden für die Seele.
[512] Beck, Charlotte Joko: *Zen im Alltag*; 1. Aufl.; 2005; Droemer/Knaur; München; ISBN 3426665611; Aus dem Amerikanischen von Bettine Braun.
[513] Carstensen, Kai-Uwe; Ebert, Christian; Endriss, Cornelia et al. (Hrsg.: *Computerlinguistik und Sprachtechnologie*; 2., überarb. und erw. Aufl.; 2004; Elsevier; München; ISBN 3827414075; gebunden.
[514] Lubkowitz, Mark: *Webseiten programmieren und gestalten*; 2., erw. Aufl.; 2005; Galileo Press; Bonn; ISBN 3898425576; Mit CD-ROM.
[515] Michel, Reiner M.: *Know-how der Unternehmensplanung*; 2., völlig neubearb. und erw. Aufl.; 1991; Sauer; Heidelberg; ISBN 3793870243; Budgetierung, Controlling, Taktische Planung, Langfristplanung und Strategie.
[516] Manekeller, Wolfgang; Reinert-Schneider, Gabriele: *Gutes Deutsch schreiben und sprechen*; 1. Aufl.; 1989; Falken; Niedernhausen; ISBN 3806844321; gebunden.
[517] Auffarth, Christoph; Bernard, Jutta; Mohr, Hubert (Hrsg.): *Metzler Lexikon Religion Band 1*; 1. Aufl.; 1999; Metzler; Stuttgart; ISBN 3476015513; Gegenwart - Alltag - Medien.
[518] Auffarth, Christoph; Bernard, Jutta; Mohr, Hubert (Hrsg.): *Metzler Lexikon Religion Band 2*; 1. Aufl.; 1999; Metzler; Stuttgart; ISBN 3476015521; Gegenwart - Alltag - Medien.
[519] Auffarth, Christoph; Bernard, Jutta; Mohr, Hubert (Hrsg.): *Metzler Lexikon Religion Band 3*; 1. Aufl.; 2000; Metzler; Stuttgart; ISBN 347601553X; Gegenwart - Alltag - Medien.
[520] Auffarth, Christoph; Bernard, Jutta; Mohr, Hubert (Hrsg.): *Metzler Lexikon Religion Band 4*; 1. Aufl.; 2002; Metzler; Stuttgart; ISBN 3476015548; Gegenwart - Alltag - Medien.
[521] ohne Angaben: *Lexikon der östlichen Weisheitslehren*; Lizenzausg.; 2005; Albatros; Düsseldorf; ISBN 349196136X; Buddhismus, Hinduismus, Taoismus, Zen.
[522] Kreiner, Armin: *Das wahre Antlitz Gottes - oder was wir meinen, wenn wir Gott sagen*; 1. Aufl.; 2006; Herder; Freiburg; ISBN 3451287765; gebunden.
[523] Monroe, Robert A.: *Der zweite Körper*; Taschenbuchausg.; 2007; Wilhelm Heyne; München; ISBN 9783453700611; Astral- und Seelenreisen in ferne Sphären der geistigen Welt.
[524] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 1*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1986; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311014; A - Apt.
[525] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 2*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1987; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311022; Apu - Bec.
[526] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 3*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1987; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311030; Bed - Brn.

[527] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 4*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1987; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311049; Bro - Cos.
[528] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 5*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1988; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311057; Cot - Dr.
[529] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 6*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1988; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311065; Ds - Ew und erster Nachtrag.
[530] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 7*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1988; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311073; Ex - Frt.
[531] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 8*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1989; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311081; Fru - Gos.
[532] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 9*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1989; Brockhaus; Mannheim; ISBN 376531109X; Got - Herp.
[533] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 10*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1989; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311103; Herr - Is.
[534] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 11*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1990; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311111; It - Kip.
[535] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 12*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1990; Brockhaus; Mannheim; ISBN 376531112X; Kir - Lag und zweiter Nachtrag.
[536] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 13*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1990; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311138; Lah - Maf.
[537] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 14*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1991; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311146; Mag - Mod.
[538] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 15*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1991; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311154; Moe - Nor.
[539] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 16*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1991; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311162; Nos - Per.
[540] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 17*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1992; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311170; Pes - Rac.
[541] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 18*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1992; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311189; Rad - Rüs und dritter Nachtrag.
[542] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 19*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1992; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311197; Rut - Sch.
[543] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 20*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1993; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311200; Sci - Sq.
[544] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 21*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1993; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311219; Sr - Teo.
[545] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 22*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1993; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311227; Tep - Ur.
[546] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 23*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1994; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311235; Us - Wej.
[547] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 24*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1994; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311243; Wek - Zz und vierter Nachtrag.
[548] Scholze-Stubenrecht, Werner; Sykes, John (Red.): *Brockhaus-Enzyklopädie Band 29*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1996; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311294; Wörterbuch Englisch: Englisch - Deutsch, Deutsch - Englisch.
[549] ohne Angaben: *Brockhaus-Enzyklopädie Band 30*; 19., völlig neubearb. Aufl.; 1996; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765311316; Ergänzungen A - Z.
[550] Hornby, A. S.; Cowie, A. P.; Gimson, A. C.: *Oxford Advanced Learner's Dictionary of Current English*; 12. Druck; 1981; Cornelsen & Oxford University Press; Berlin; ISBN 3810900486; Revised and updated.
[551] Baer, Dieter; Wermke, Matthias (Bearb.): *Duden, Das große Fremdwörterbuch*; 2., neu bearb. und erw. Aufl.; 2000; Dudenverlag; Mannheim; ISBN 3411041625; Herkunft und Bedeutung der Fremdwörter.
[552] Müller, Kristiane; Urban, Eberhard (Hrsg.): *Die Weibsbilder im Spiegel der Karikatur*; 1. Aufl.; 1987; Edition Aktuell; Menden; ISBN 3924456518; Eine Kultur- und Sittengeschichte des 19. Jahrhunderts.
[553] Bayer, Karl: *Nota bene!*; 1. Aufl.; 1993; Artemis & Winkler; Zürich; ISBN 3760810926; Das lateinische Zitatenlexikon.
[554] Waechter, Friedrich-Karl: *Opa Hucke's Mitmach-Kabinett*; 2. Aufl.; 1977; Beltz & Gelberg; Weinheim; ISBN 3407805152; Jugendbuch.
[555] Wulff, David M.: *Psychology of Religion*; 2nd Ed.; 1997; John Wiley & Sons; New York; ISBN 0471037060; Classic and Contemporary.

[556] Bieri, Peter (Hrsg.): *Analytische Philosophie des Geistes*; 3., unveränd. Aufl.; 1997; Beltz Athenäum; Weinheim; ISBN 3895471178; Neue wissenschaftliche Bibliothek.
[557] Meixner, Uwe: *Einführung in die Ontologie*; 1. Aufl.; 2004; Wissenschaftliche Buchgesellschaft; Darmstadt; ISBN 3534154584; Philosophie.
[558] Tiedemann, Paul: *Internet für Philosophen*; 2., überarb. Aufl.; 1999; Primus; Darmstadt; ISBN 3896781081; Eine praxisorientierte Einführung.
[559] Brüning, Walther: *Grundlagen der Strengen Logik*; 1. Aufl.; 1996; Königshausen & Neumann; Würzburg; ISBN 3826012046; Philosophie.
[560] Schnell, Rainer; Hill, Paul B.; Esser, Elke: *Methoden der empirischen Sozialforschung*; 6., völlig überarb. und erw. Aufl.; 1999; Oldenbourg; München; ISBN 3486250434; gebunden.
[561] Sikin, Evgenij: *Lineare Räume und Abbildungen*; 1. Aufl.; 1994; Spektrum, Akademischer Verlag; Heidelberg; ISBN 3860253050; Mathematik.
[562] Sachs, Lothar: *Angewandte Statistik*; 8., völlig neu bearb. und erw. Aufl.; 1997; Springer; Berlin; ISBN 3540604948; Anwendung statistischer Methoden.
[563] Jänich, Klaus: *Lineare Algebra*; 2. Aufl.; 1981; Springer; Berlin; ISBN 3540104704; Ein Skriptum für das erste Semester.
[564] Hämmerlin, Günther; Hoffmann, Karl-Heinz: *Numerische Mathematik*; 2. Aufl.; 1991; Springer; Berlin; ISBN 354053539X; Mit 72 Abbildungen.
[565] Zimbardo, Philip G.: *Psychologie*; 4., neubearb. Aufl.; 1983; Springer; Berlin; ISBN 3540121234; Mit 322 zum Teil farbigen Abbildungen.
[566] Dambmann, Gerhard; Lange, Helmut; Rohde, Manfred: *Mit Edmund Hillary durch den Himalaya*; 2. Aufl.; 1987; Herder; Freiburg; ISBN 3451210754; Mit zahlreichen Abbildungen.
[567] Molcho, Samy: *Körpersprache*; 1. Aufl.; 1984; Mosaik; München; ISBN 3570049736; Mit Fotografien von Thomas Klinger und Hans Albrecht Lusznat.
[568] Roetzel, Bernhard: *Der Gentleman*; 1. Aufl.; 1999; Könemann; Köln; ISBN 3895086371; Handbuch der klassischen Herrenmode.
[569] Vass, László; Molnár, Magda: *Herrenschuhe handgearbeitet*; 1. Aufl.; 1999; Könemann; Köln; ISBN 3895081116; Fotografie Georg Valerius.
[570] Savant, Marilyn vos; Fleischer, Leonore: *BrainBuilding*; 1. Aufl.; 1992; Falken; Niedernhausen; ISBN 3806847045; Das 12-Wochen-Trainingsprogramm für Gedächtnis, Logik, Kreativität.
[571] Hürlimann, Gertrud I.: *Astrologie*; 3. Aufl.; 1984; Novalis; Schaffhausen; ISBN 3721430026; Ein methodisch aufgebautes Lehrbuch.
[572] Jöckle, Clemens: *Das große Heiligenlexikon*; 1. Aufl.; 2003; Parkland; Köln; ISBN 3893400451; Mit zahlreichen Abbildungen.
[573] Halbfas, Hubertus: *Die Bibel*; 3. Aufl.; 2002; Patmos; Düsseldorf; ISBN 3491703344; Mit zahlreichen Abbildungen.
[574] Halbfas, Hubertus: *Das Christentum*; 1. Aufl.; 2004; Patmos; Düsseldorf; ISBN 3491703778; Mit zahlreichen Abbildungen.
[575] Quinn, Philipp L.; Taliaferro, Charles (Ed.): *A Companion to Philosophy of Religion*; 1st Ed. paperback; 1999; Blackwell; Oxford; ISBN 0631213287; Blackwell Companions to Philosophy 9.
[576] Cooper, David (Ed.): *A Companion to Aesthetics*; Reprint; 1997; Blackwell; Oxford; ISBN 0631196595; Blackwell Companions to Philosophy 3.
[577] Kim, Jaegwon; Sosa, Ernest (Ed.): *A Companion to Metaphysics*; Reprint; 1998; Blackwell; Oxford; ISBN 0631199993; Blackwell Companions to Philosophy 7.
[578] Inwagen, Peter van; Zimmerman, Dean W. (Ed.): *Metaphysics: The Big Questions*; 1st Ed.; 1998; Blackwell; Oxford; ISBN 0631205888; Philosophy.
[579] Bunnin, Nicholas; Tsui-James, E. P. (Ed.): *The Blackwell Companion to Philosophy*; Reprint; 1998; Blackwell; Oxford; ISBN 0631187898; Blackwell Companions to Philosophy 1.
[580] Kugler, Gernot; Böhmer, Ernst; Kümmel, Gerd et al.: *Kaufmännische Betriebslehre Hauptausgabe*; 20. Aufl.; 1990; Europa-Lehrmittel; Haan-Gruiten; ISBN 3808590203; Verfasst von Lehrern an Kaufmännischen Schulen.
[581] Deitermann, Manfred; Schmolke, Siegfried: *Industriebuchführung mit Kosten- und Leistungsrechnung IKR*; 14., durchges. Aufl.; 1990; Winklers; Darmstadt; ISBN 3804566219; Einführung und Praxis.
[582] Bodden, Horst; Kaußen, Herbert; Renné, Rudi: *Past and Future*; 2. Aufl.; 1980; Langenscheidt-Longman; München; ISBN 3526503117; Elective Courses in English for Level II.
[583] Bates, Martin; Dudley-Evans, Tony: *General Science*; New Ed.; 1982; Longman; Essex; ISBN 0582748607; English for Science and Technology.
[584] Holtermann, Horst: *Ianua Linguae Graecae*; 3. Aufl.; 1979; Vandenhoeck & Ruprecht; Göttingen; ISBN 3525720793; Lese- und Übungsbuch für den griechischen Anfangsunterricht am Gymnasium.

[585] Erdle-Hähner, Rita; Freitag, Günter; Matthes, Dietmar et al. (Hrsg.): *Etudes Francaises Cours Intensif 1*; 1. Aufl.; 1980; Klett; Stuttgart; ISBN 3125206006; Schulbuch Französisch.
[586] Erdle-Hähner, Rita; Freitag, Günter; Matthes, Dietmar et al. (Hrsg.): *Etudes Francaises Cours Intensif 1*; 1. Aufl.; 1981; Klett; Stuttgart; ISBN 3125206200; Grammatisches Beiheft.
[587] Erdle-Hähner, Rita; Freitag, Günter; Rolinger, Hermann et al. (Hrsg.): *Etudes Francaises Cours de base Deuxième degré*; 1. Aufl.; 1979; Klett; Stuttgart; ISBN 3125202205; Grammatisches Beiheft.
[588] Erdle-Hähner, Rita; Freitag, Günter; Rolinger, Hermann et al. (Hrsg.): *Etudes Francaises Cours de base Troisième degré*; 1. Aufl.; 1981; Klett; Stuttgart; ISBN 3125203201; Grammatisches Beiheft.
[589] Willers, Hermann (Bearb.): *Langenscheidts Grammatiktafel Italienisch*; 1. Aufl.; 1982; Langenscheidt; Berlin; ISBN 3468361807; Regeln und zahlreiche praktische Beispiele.
[590] Willers, Hermann (Bearb.): *Langenscheidts Verb-Tabellen Italienisch*; 7. Aufl.; 1982; Langenscheidt; Berlin; ISBN 3468341814; Unregelmäßige und regelmäßige Verben richtig konjugiert.
[591] Bunke, Horst: *Modellgesteuerte Bildanalyse*; 1. Aufl.; 1985; Teubner; Stuttgart; ISBN 3519024810; Dargestellt anhand eines Systems zur automatischen Auswertung von Sequenzszintigrammen des menschlichen Herzens.
[592] Baumann, Rüdeger: *Informatik mit Pascal*; 1. Aufl.; 1981; Klett; Stuttgart; ISBN 3127177402; Schulbuch.
[593] Börger, Egon: *Berechenbarkeit, Komplexität, Logik*; 3., verb. und erw. Aufl.; 1992; Vieweg; Braunschweig; ISBN 3528289287; Algorithmen, Sprachen und Kalküle unter besonderer Berücksichtigung ihrer Komplexität.
[594] Aho, Alfred V.; Hopcroft, John E.; Ullman, Jeffrey D.: *The Design and Analysis of Computer Algorithms*; 1st Ed.; 1974; Addison Wesley; London; ISBN 0201000296; Informatics.
[595] Grams, Timm: *Denkfallen und Programmierfehler*; 1. Aufl.; 1990; Springer; Berlin; ISBN 3540520392; Mit 17 Abbildungen.
[596] Lehnert, Uwe: *Der EDV-Dozent*; Akt. und erw. Aufl.; 1992; Markt und Technik; Haar; ISBN 387791201X; Planung und Durchführung von EDV-Lehrveranstaltungen.
[597] Woll, Artur: *Allgemeine Volkswirtschaftslehre*; 10., überarb. und erg. Aufl.; 1990; Vahlen; München; ISBN 3800614758; Vahlens Handbücher für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften.
[598] Bruce, Betsy: *Jetzt lerne ich Dreamweaver 4*; 1. Aufl.; 2001; Markt und Technik; München; ISBN 3827260957; Deutsche Übersetzung: Judith Muhr.
[599] Steyer, Ralph: *Opera 5*; 1. Aufl.; 2001; Markt und Technik; München; ISBN 3827261147; So surfen Sie bequem und schnell durchs Netz!.
[600] Sturm, Eberhard: *Programmieren in PL/I*; 1. Aufl.; 1990; Vieweg; Braunschweig; ISBN 3528047925; Eine moderne Einführung.
[601] Todino, Grace; Strang, John; Peek, Jerry: *UNIX - ein praktischer Einstieg*; 1. Aufl.; 1996; O'Reilly; Bonn; ISBN 3930673290; Erste Schritte mit Unix.
[602] Knuth, Donald Ervin: *The Art of Computer Programming Volume 3*; 2nd Ed.; 1998; Addison Wesley; Reading; ISBN 0201896850; Sorting and Searching.
[603] Doberenz, Walter; Kowalski, Thomas: *Datenbankprogrammierung mit Visual Basic 6*; 1. Aufl.; 1999; Microsoft Press; Unterschleißheim; ISBN 3860634852; Grundlagen, Rezepte und Anwendungsbeispiele zur Datenbankprogrammierung mit Visual Basic 6, DAO und ADO.
[604] Barnert, Silvia; Boeckh, Martin; Delbrück, Matthias et al.: *Der Brockhaus - Computer und Informationstechnologie*; 1. Aufl.; 2002; Brockhaus; Mannheim; ISBN 3765302511; Hardware, Software, Multimedia, Internet, Telekommunikation.
[605] Andrews, Mark: *Visual C++ jetzt!*; 1. Aufl.; 1996; Microsoft Press; Unterschleißheim; ISBN 3860630202; Das komplette Lernpaket: mit voll funktionsfähiger Version von Microsoft Visual C++.
[606] Steyer, Ralph: *Java 2*; 1. Aufl.; 2002; Markt und Technik; München; ISBN 3827262429; Kompakt, komplett, kompetent.
[607] Franke, Matthias: *Visual Basic 6*; 1. Aufl.; 1998; Data Becker; Düsseldorf; ISBN 3815811449; Mit den Supersteps zum Erfolg.
[608] Graf, Ludwig (Hrsg.): *Telekolleg 2 Datenverarbeitung*; 1. Aufl.; 1990; TR-Verlagsunion; München; ISBN 3805821476; Informatik.
[609] Maubach, Claudia; Dörr, Cornelia: *3D WohnDesigner*; 3. Aufl.; 1996; Data Becker; Düsseldorf; ISBN 3815869617; Der Profi-Designer in einer neuen Generation.
[610] Harten, Hans-Ulrich: *Physik für Mediziner*; 3., neubearb. und erg. Aufl.; 1977; Springer; Berlin; ISBN 3540081828; Eine Einführung.
[611] Jahrreiß, Heribert: *Einführung in die Physik für Studenten der Medizin und der Naturwissenschaften*; 1. Aufl.; 1977; Deutscher Ärzte-Verlag; Köln-Lövenich; ISBN 3769100352; Mit vollständiger Berücksichtigung des Gegenstandskatalogs für die Ärztliche Vorprüfung und entsprechenden Texthinweisen.

[612] Rebhan, Eckhard: *Theoretische Physik I*; 1. Nachdruck; 2001; Spektrum Akademischer Verlag; Heidelberg; ISBN 3827402468; Mechanik, Elektrodynamik, Relativitätstheorie, Kosmologie.
[613] Krueger, Franz R.: *Physik und Evolution*; 1. Aufl.; 1984; Paul Parey; Berlin; ISBN 348961934X; Physikalische Ansätze zu einer Einheit der Naturwissenschaften auf evolutiver Grundlage.
[614] Haken, Hermann: *Synergetik*; 1. Aufl.; 1982; Springer; Berlin; ISBN 354011050X; Eine Einführung.
[615] Dorn, Friedrich; Bader, Franz: *Physik in einem Band*; 1. Aufl.; 1976; Schroedel; Hannover; ISBN 3507861704; Schulbuch.
[616] Hawking, Stephen W.: *Eine kurze Geschichte der Zeit*; 176.-215. Tsd.; 1988; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3498028847; Die Suche nach der Urkraft des Universums.
[617] Kaufmann, H.; Jecklin, L.: *Grundlagen der anorganischen Chemie*; 8. Aufl.; 1977; Birkhäuser; Basel; ISBN 3764309377; Chemie.
[618] Cuny, Karl-Heinz; Weber, Walter: *Chemie - Welt der Stoffe*; 1. Aufl.; 1975; Schroedel; Hannover; ISBN 3507861801; Experiment - Struktur - Modell.
[619] Mortimer, Charles E.: *Chemie*; 3., neubearb. Aufl.; 1980; Thieme; Stuttgart; ISBN 313484303X; Das Basiswissen der Chemie in Schwerpunkten.
[620] Lipschutz, Seymour: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*; Nachdruck; 1980; McGraw-Hill; Düsseldorf; ISBN 0070843619; Theorie und Anwendung.
[621] J. Kelly Beatty, Brian O'Leary, Andrew Chaikin (Hrsg.): *Die Sonne und ihre Planeten*; 1. Aufl.; 1983; Physik-Verlag; Weinheim; ISBN 3876640563; Weltraumforschung in einer neuen Dimension.
[622] Pugnetti, Gino: *Beethoven und seine Zeit*; 1. Aufl.; 1965; Vollmer; Wiesbaden; ohne ISBN; Musiker.
[623] Arndt, Claudia Maria; Bernsen, Thomas; Breuer, Klaus et al.: *Jahrbuch des Rhein-Sieg-Kreises 2007*; 1. Aufl.; 2006; Edition Blattwelt; Niederhofen; ISBN 3936256241; Landschaft und Natur, Geschichte und Geschichten, Leben und Kultur, Wirtschaft und Technik, Chronik 2005 / 2006.
[624] Mayer, Ferdinand (Bearb.): *Diercke Weltatlas*; 5. Aufl. der Neubearb.; 1975; Westermann; Braunschweig; ISBN 3141005001; 200 Kartenseiten.
[625] The American Astro Analysis Institute (Hrsg.): *Jungfrau*; 1. Aufl.; 1979; Goldmann; München; ISBN 3442100283; Astrologie.
[626] Orban, Peter; Zinnel, Ingrid; Weller, Thea: *Symbolon*; 1. Aufl.; 1993; Hugendubel; München; ISBN 3880347069; Das Spiel der Erinnerungen - Zur Symbolik astrologischer Aspekte.
[627] Seifert, Traudl: *Heilige in Kunst und Legende*; Unveränd. Aufl.; 1973; Schuler; München; ASIN B0000BNU4O; Mit zahlreichen Abbildungen.
[628] Traeger, Jörg: *Renaissance und Religion*; 1. Aufl.; 1997; C. H. Beck; München; ISBN 3406428010; Die Kunst des Glaubens im Zeitalter Raphaels.
[629] Kühn, Helga-Maria; Brinkmann, Jens-Uwe: *Göttingen*; 1. Aufl.; 1985; Vandenhoeck & Ruprecht; Göttingen; ISBN 3525391587; Fotos von Helmut Scheiter und Hans Wilder.
[630] Lipschutz, Seymour; Poe, Arthur: *Programmieren mit FORTRAN einschließlich strukturiertes FORTRAN*; 1. Aufl.; 1981; McGraw-Hill; Hamburg; ISBN 0070920303; Theorie und Anwendung.
[631] Spiegel, Murray R.: *Allgemeine Mechanik*; Nachdruck; 1979; McGraw-Hill; Düsseldorf; ISBN 0070843767; Theorie und Anwendung - Mit einer Einführung in die Lagrangeschen und Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.
[632] Büchner, Rudolf: *Bücher und Menschen*; 1. Aufl.; 1976; Mohn; Gütersloh; ISBN 3570025012; Vom Buch und seinen Wirkungen in Geschichte und Gegenwart.
[633] Connolly, Peter; Dodge, Hazel: *Die antike Stadt*; 1. Aufl.; 1998; Könemann; Köln; ISBN 3829011040; Das Leben in Athen & Rom.
[634] Crosher, Judith: *Die Griechen*; 1. Aufl.; 1976; Falken; Wiesbaden; ISBN 380688019; Große Völker der Vergangenheit.
[635] Goscinny, Rene; Uderzo, Albert: *Obelix GmbH & Co.KG*; Nachdruck; 1984; Delta; Stuttgart; ISBN 3770400232; Großer Asterix-Band XXIII.
[636] Bretecher, Claire: *Doktor med. Bobo*; 1. Aufl.; 1986; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3498005014; Sprechstunden nach Vereinbarung.
[637] Bretecher, Claire: *Agrippina*; 16.-23. Tsd.; 1989; Rowohlt; Reinbek; ISBN 3498005324; Mozart ist Asche bis auf die Musik zum Film.
[638] Moers, Walter: *Kleines Arschloch*; 5. Aufl.; 1991; Eichborn; Frankfurt am Main; ISBN 382183000X; Prrrffzzz!!!.
[639] Müller, Siegfried; Rolinger, Hermann; Wüst, Arthur (Hrsg.): *Etudes Francaises Cours de base Premier degré*; 1. Aufl.; 1977; Klett; Stuttgart; ISBN 3125201500; Cahier d'exercices.
[640] Erdle-Hähner, Rita; Rolinger, Hermann; Wüst, Arthur (Hrsg.): *Etudes Francaises Cours de base Deuxième degré*; 1. Aufl.; 1979; Klett; Stuttgart; ISBN 3125202507; Cahier d'exercices.
[641] Erdle-Hähner, Rita; Rolinger, Hermann; Wüst, Arthur (Hrsg.): *Etudes Francaises Cours de base Troisième degré*; 1. Aufl.; 1981; Klett; Stuttgart; ISBN 3125203503; Cahier d'exercices.

[642] Keller, Will (Hrsg.): *Merian Berlin*; 1. Aufl.; 1989; Hoffmann & Campe; Hamburg; ISBN 345528907X; Monatsheft der Städte und Landschaften.
[643] Keller, Will (Hrsg.): *Merian Deutsche Ostseeküste*; 1. Aufl.; 1994; Hoffmann & Campe; Hamburg; ISBN 3455294057; Monatsheft der Städte und Landschaften.
[644] Heine, Helme: *Uhren haben keine Bremse*; Orig.ausg.; 1985; Diogenes; Zürich; ISBN 3257020139; Cartoons.
[645] Goscinny, Rene; Uderzo, Albert: *Asterix und Cleopatra*; 2. Aufl.; 2004; Delta; Stuttgart; ISBN 3770400569; Großer Asterix-Band II.
[646] Goscinny, Rene; Uderzo, Albert: *Streit um Asterix*; 9. Aufl.; 2004; Delta; Stuttgart; ISBN 3770400151; Großer Asterix-Band XV.
[647] Goscinny, Rene; Uderzo, Albert: *Die Lorbeeren des Cäsar*; 6. Aufl.; 2007; Delta; Stuttgart; ISBN 3770400186; Großer Asterix-Band XVIII.
[648] Holl, Adolf: *Religionssoziologie*; 1. Aufl.; 1995; ÖBV Pädagogischer Verlag; Wien; ISBN 3215073374; Materialien und Texte zur Politischen Bildung Band 8.
[649] Abel, Dietrich von; Fink, Cornelia; Gillhofer, Peter et al.: *Wie? Warum? Weshalb?*; 1. Aufl.; 1991; Das Beste; Stuttgart; ISBN 387070375X; Verblüffende Ideen, geniale Lösungen, faszinierende Fakten aus Natur und Technik.
[650] Shelly, Gary B.; Cashman, Thomas J.; Goodwin, Hal: *RPG II, RPG III, and RPG/400*; 1st Ed.; 1990; Boyd & Fraser; Boston; ISBN 0878352465; Informatics.
[651] Bühl, Achim; Zöfel, Peter: *SPSS für Windows Version 6.1*; 3., überarb. und erg. Aufl.; 1996; Addison Wesley; Bonn; ISBN 3827311349; Praxisorientierte Einführung in die moderne Datenanalyse.
[652] Bühler, Walter K.: *Gauss*; 1. Aufl.; 1986; Springer; Berlin; ISBN 3540168834; Eine biographische Studie.
[653] Trökes, Anna: *Yoga*; 1. Aufl.; 2003; Klett; Stuttgart; ISBN 3129398732; Ankommen in Körper, Geist und Atem.
[654] Engelhardt, Friedrich Rudolf: *Das Wissen von der Hand*; 1. Aufl.; 1987; Hugendubel; München; ISBN 3880343276; Handlesekunst als Wissenschaft.
[655] Goldmann, Gereon: *Tödliche Schatten - Tröstendes Licht*; 10., erw. dt. Aufl.; 2005; EOS-Verlag; St. Ottilien; ISBN 3830671385; Erinnerungen von Pater Gereon Goldmann.
[656] Virtue, Doreen: *Dein Leben im Licht*; 4. Aufl.; 2007; Ullstein; Berlin; ISBN 9783548742328; Heilung durch Selbsterkenntnis.
[657] Fischer, Peter: *Philosophie der Religion*; 1. Aufl.; 2007; Vandenhoeck & Ruprecht; Göttingen; ISBN 9783525036167; Taschenbuch.
[658] Gerwin, Hanno: *Was Deutschlands Prominente glauben*; 1. Aufl.; 2006; Goldmann; München; ISBN 3442154200; Taschenbuch.
[659] Praagh, James van: *Jenseitswelten*; 4. Aufl.; 2006; Goldmann; München; ISBN 3442216249; Erkenntnisse über das Leben nach dem Tode.
[660] Browne, Sylvia: *Jenseits-Leben*; 4. Aufl.; 2006; Goldmann; München; ISBN 3442216036; Berichte eines Mediums aus der geistigen Welt.
[661] Easwaran, Eknath (Übers.): *Dhammapada*; 1. Aufl.; 2006; Goldmann; München; ISBN 3442217644; Buddhas zentrale Lehren.
[662] Libet, Benjamin: *Mind Time*; 1. Aufl.; 2007; Suhrkamp; Frankfurt am Main; ISBN 9783518294345; Wie das Gehirn Bewusstsein produziert.
[663] Schwanitz, Dietrich: *Bildung*; 21. Aufl.; 2002; Goldmann; München; ISBN 9783442151479; Alles, was man wissen muss.
[664] Englisch, Andreas: *Johannes Paul II.*; 5. Aufl.; 2003; Ullstein; München; ISBN 3550075766; Das Geheimnis des Karol Wojtyla.
[665] Hartlieb, Gabriele; Quarch, Christoph; Schellenberger, Bernardin (Hrsg: *Spirituell leben*; 1. Aufl.; 2006; Herder; Freiburg; ISBN 9783451056994; Haltungen - Übungen - Inspirationen.
[666] Luhmann, Niklas: *Liebe als Passion*; 1. Aufl.; 1994; Suhrkamp; Frankfurt; ISBN 3518287249; Zur Codierung von Intimität.
[667] Mello, Anthony de: *Wo das Glück zu finden ist*; 9., durchges. Aufl.; 2004; Herder; Freiburg; ISBN 3451284014; Weisheitsgeschichten für jeden Tag.
[668] Drewermann, Eugen: *Wozu Religion?*; 4. Aufl.; 2006; Herder; Freiburg; ISBN 9783451053801; Sinnfindung in Zeiten der Gier nach Macht und Geld.
[669] Küng, Hans: *Wozu Weltethos?*; 1. Aufl.; 2006; Herder; Freiburg; ISBN 9783451057977; Religion und Ethik in Zeiten der Globalisierung.
[670] Aurobindo, Sri: *Savitri*; 3., unveränd. Aufl.; 2006; Hinder & Deelmann; Gladenbach; ISBN 3873481510; Legende und Sinnbild.

[671] Aurobindo, Sri: *Das göttliche Leben - Erstes Buch*; 3., unveränd. Aufl.; 2002; Hinder & Deelmann; Gladenbach; ISBN 3873481723; The Life Divine.
[672] Aurobindo, Sri: *Das göttliche Leben - Zweites Buch Teil 1*; 3., unveränd. Aufl.; 2004; Hinder & Deelmann; Gladenbach; ISBN 3873481456; The Life Divine.
[673] Aurobindo, Sri: *Das göttliche Leben - Zweites Buch Teil 2*; 3., unveränd. Aufl.; 2004; Hinder & Deelmann; Gladenbach; ISBN 3873481464; The Life Divine.
[674] Fox, Matthew; Sheldrake, Rupert: *Engel*; 1. Aufl.; 2001; Bechtermünz; Augsburg; ISBN 3828934129; Die kosmische Intelligenz.
[675] Müller, Werner A.; Hassel, Monika: *Entwicklungsbiologie und Reproduktionsbiologie von Mensch und Tieren*; 4., vollst. überarb. Aufl.; 2006; Springer; Berlin; ISBN 3540240578; Ein einführendes Lehrbuch.
[676] Görnitz, Thomas; Görnitz, Brigitte: *Die Evolution des Geistigen*; 1. Aufl.; 2008; Vandenhoeck & Ruprecht; Göttingen; ISBN 9783525567173; Quantenphysik - Bewusstsein - Religion.
[677] Thompson, Richard F.: *Das Gehirn*; 3. Aufl.; 2001; Spektrum Akademischer Verlag; Heidelberg; ISBN 3827410800; Von der Nervenzelle zur Verhaltenssteuerung.
[678] Hitchens, Christopher: *God is Not Great*; 1st Ed.; 2008; Atlantic Books; London; ISBN 9781843545743; How Religion Poisons Everything.
[679] Morandini, Simone: *Teologia e fisica*; 1. ed.; 2007; Morcelliana; Brescia; ISBN 9788837221157; Novecento teologico.
[680] Hahn, Christoph; Hohl, Siegmar (Hrsg.): *Der große Museumsführer*; Akt. Sonderausg.; 2002; Bassermann; München; ISBN 3809450138; Sammlungen zu Kunst, Kultur, Natur und Technik in Deutschland.
[681] Düwell, Marcus; Hübenthal, Christoph; Werner, Micha H. (Hrsg.): *Handbuch Ethik*; 2., akt. u. erw. Aufl.; 2006; Metzler; Stuttgart; ISBN 3476021246; Ansätze, Formen und zentrale Begriffe.
[682] Höffe, Otfried (Hrsg.): *Lexikon der Ethik*; 7., neubearb. u. erw. Aufl.; 2008; Beck; München; ISBN 9783406568107; in Zusammenarbeit mit Maximilian Forschner, Christoph Horn und Wilhelm Vossenkuhl.
[683] Remus, Joscha: *Infonautik*; 1. Aufl.; 2005; Gabal; Offenbach; ISBN 3897495643; Wege durch den Wissensdschungel.
[684] Birkenbihl, Vera F.: *Das innere Archiv*; 4. erw. Aufl.; 2007; MVG; München; ISBN 9783636072061; Fortsetzung von "Stroh im Kopf?".
[685] Williams, Thomas D.: *Greater Than You Think*; 1st Ed.; 2008; Faithwords; New York; ISBN 0446514934; A Theologian Answers the Atheists About God.
[686] Stilman, Anne: *Grammatically Correct*; Rev. Ed.; 2004; Writers Digest; Cincinnati; ISBN 1582973318; The writer's essential guide to punctuation, spellling, style, usage and grammar.
[687] Schweitzer, Friedrich: *Religionspädagogik*; 1. Aufl.; 2006; Gütersloher Verlagshaus; Gütersloh; ISBN 9783579054025; Lehrbuch Praktische Theologie Band 1.
[688] Stiftung, Bertelsmann: *Relgionsmonitor 2008*; 1. Aufl.; 2007; Gütersloher Verlagshaus; Gütersloh; ISBN 9783579064659; Kommentierte Statistik.
[689] Schockenhoff, Eberhard: *Grundlegung der Ethik*; 1. Aufl.; 2007; Herder; Freiburg; ISBN 9783451289385; Ein theologischer Entwurf.
[690] Brück, Michael von (Hrsg.): *Religion - Segen oder Fluch der Menschheit?*; 1. Aufl.; 2008; Verlag der Weltreligionen; Frankfurt; ISBN 9783458710165; Gefördert durch die Udo Keller Stiftung Forum Humanum.
[691] Frielingsdorf, Karl: *Mein Leben mit Gott versöhnen*; 1. Aufl.; 2008; Echter; Würzburg; ISBN 9783429029777; Ein Kursbuch für geistliches Wachsen und Begleiten.
[692] Rias-Bucher, Barbara: *Vitamin-Küche*; 1. Aufl.; 1997; Das Beste; Stuttgart; ISBN 3870706694; Die köstlichsten Rezepte für Gemüse, Salat, Getreide und Früchte.
[693] Osho: *Der Gott, den es nicht gibt*; 1. Aufl.; 2008; Ullstein; Berlin; ISBN 9783548741604; Westliche Religion und die Lüge von Gott.
[694] Goleman, Daniel: *Soziale Intelligenz*; 1. Aufl.; 2008; Knaur; München; ISBN 9783426780886; Wer auf andere zugehen kann, hat mehr vom Leben.
[695] Hegi, Christoph; Attinger, Gabrielle: *Marco Polo Reiseführer Zürich*; 8., akt. Aufl.; 2008; Mairdumont; Ostfildern; ISBN 9783829705950; Reisen mit Insider-Tipps.
[696] Stiglitz, Joseph: *Die Chancen der Globalisierung*; 1. Aufl.; 2008; Pantheon; München; ISBN 9783570550489; Aus dem amerikanischen Englisch von Thorsten Schmidt.
[697] Wessels, Wolfgang: *Das politische System der Europäischen Union*; 1. Aufl.; 2008; Verlag für Sozialwissenschaften; Wiesbaden; ISBN 9783810040657; Politikwissenschaft.
[698] Leif, Thomas; Speth, Rudolf (Hrsg.): *Die fünfte Gewalt*; 1. Aufl.; 2006; Verlag für Sozialwissenschaften; Wiesbaden; ISBN 3531150332; Lobbyismus in Deutschland.

[699] Marschall, Stefan: *Parlamentarismus*; 1. Aufl.; 2005; Nomos; Baden-Baden; ISBN 383291062X; Eine Einführung.
[700] Aristoteles: *Über die Seele*; 1. Aufl.; 2007; Voltmedia; Paderborn; ISBN 9783867636056; Worte, die die Welt veränderten.
[701] Samuelson, Paul A.; Nordhaus, William D.: *Volkswirtschaftslehre*; 3., akt. Aufl.; 2007; mi-Fachverlag; Landsberg; ISBN 9783636031129; Das internationale Standardwerk der Makro- und Mikroökonomie.
[702] Osho: *Autobiographie*; 2. Aufl.; 2007; Ullstein; Berlin; ISBN 9783548742526; Begegnung mit dem rebellischen Meister.
[703] Ziegler, Jean: *Das Imperium der Schande*; 3. Aufl.; 2008; Goldmann; München; ISBN 9783442155132; Der Kampf gegen Armut und Unterdrückung.
[704] Nuscheler, Franz: *Lern- und Arbeitsbuch Entwicklungspolitik*; 6. Aufl.; 2005; Dietz; Bonn; ISBN 3801203506; Eine grundlegende Einführung in die zentralen entwicklungspolitischen Themenfelder Globalisierung, Staatsversagen, Hunger, Bevölkerung, Wirtschaft und Umwelt.
[705] Rekacewicz, Philippe (Ill.): *Atlas der Globalisierung*; 2., durchges. Aufl.; 2006; Taz; Berlin; ISBN 9783937683072; Die neuen Daten und Fakten zur Lage der Welt.
[706] Nohlen, Dieter; Schultze, Rainer-Olaf (Hrsg.): *Lexikon der Politikwissenschaft Band 1 A-M*; 3., akt. und erw. Aufl.; 2005; Beck; München; ISBN 340654116X; Theorien, Methoden, Begriffe.
[707] Nohlen, Dieter; Schultze, Rainer-Olaf (Hrsg.): *Lexikon der Politikwissenschaft Band 2 N-Z*; 3., akt. und erw. Aufl.; 2005; Beck; München; ISBN 3406541178; Theorien, Methoden, Begriffe.
[708] Hilger, Georg; Ritter, Werner H.: *Religionsdidaktik Grundschule*; 2. Aufl.; 2008; Kösel; München; ISBN 9783466367078; Handbuch für die Praxis des evangelischen und katholischen Religionsunterrichts.
[709] Wilber, Ken: *Eros, Kosmos, Logos*; 4. Aufl.; 2006; Fischer; Frankfurt; ISBN 9783596149742; Eine Jahrtausend-Vision.
[710] Mutius, Bernhard von: *Die Verwandlung der Welt*; 1. Aufl.; 2000; Klett-Cotta; Stuttgart; ISBN 3608942718; Ein Dialog mit der Zukunft.
[711] Holtfrerich, Carl-Ludwig: *Wo sind die Jobs?*; 1. Aufl.; 2007; Deutsche Verlags-Anstalt; München; ISBN 9783421042774; Eine Streitschrift für mehr Arbeit.
[712] Osho: *Intelligenz*; 2. Aufl.; 2008; Ullstein; Berlin; ISBN 9783548741611; Die kreative Antwort zum Jetzt.
[713] Ulich, Eberhard: *Arbeitspsychologie*; 6., überarb. u. erw. Aufl.; 2005; vdf Hochschulverlag; Zürich; ISBN 3728129984; Text- und Lehrbuch, Informations- und Nachschlagewerk.
[714] Dreikurs, Rudolf; Soltz, Vicki: *Kinder fordern uns heraus*; 16. Aufl.; 2008; Klett-Cotta; Stuttgart; ISBN 9783608944006; Wie erziehen wir sie zeitgemäß?.
[715] Fischer, Marcus: *Ubuntu GNU/Linux*; 4., akt. und erw. Aufl.; 2009; Galileo Press; Bonn; ISBN 9783836214391; Das umfassende Handbuch.
[716] Chopra, Deepak: *Die göttliche Kraft*; 4. Aufl.; 2006; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 9783423362726; Die sieben Stufen der spirituellen Erkenntnis.
[717] Birkenbihl, Vera F.: *Rhetorik*; 10. Aufl.; 2002; Ariston; München; ISBN 3720522997; Redetraining für jeden Anlass.
[718] Sandel, Michael J.: *Plädoyer gegen die Perfektion*; 1. Aufl.; 2008; Berlin University Press; Berlin; ISBN 9783940432032; Ethik im Zeitalter der genetischen Technik.
[719] Kuan, Yu-Chien; Häring-Kuan, Petra: *Der China-Knigge*; 6. Aufl.; 2008; Fischer; Frankfurt; ISBN 9783596166848; Eine Gebrauchsanweisung für das Reich der Mitte.
[720] Ess, Hans van: *Die 101 wichtigsten Fragen*; 1. Aufl.; 2008; Beck; München; ISBN 9783406568084; China.
[721] Vitzthum, Wolfgang Graf (Hrsg.): *Völkerrecht*; 4., neu bearb. Aufl.; 2007; De Gruyter; Berlin; ISBN 9783899494259; Lehrbuch.
[722] Grill, Bartholomäus: *Ach, Afrika*; 6. Aufl.; 2005; Goldmann; München; ISBN 9783442153374; Berichte aus dem Inneren eines Kontinents.
[723] Stang, Friedrich: *Indien*; 1. Aufl.; 2002; Wissenschaftliche Buchgesellschaft; Darmstadt; ISBN 3534062108; Mit 98 Abbildungen, 82 Bildern.
[724] Johnen, Kurt: *Allgemeine Musiklehre*; 21. Aufl.; 2008; Reclam; Stuttgart; ISBN 9783150073520; Mit zahlreichen Notenbeispielen.
[725] Michels, Ulrich: *dtv-Atlas Musik*; 1. Aufl.; 2008; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423085991; Mit 250 Abbildungsseiten in Farbe.
[726] Oberhoffer, Heinrich: *Harmonie- und Kompositionslehre*; 1. Aufl.; 2006; Elibron; New York; ISBN 0543838323; Mit besonderer Rücksicht auf das Orgelspiel in katholischen Kirchen.
[727] Kuhn, Clemens: *Formenlehre der Musik*; 8. Aufl.; 2007; Bärenreiter; Kassel; ISBN 9783761813928; Mit Notenbeispielen.

[728] Krämer, Thomas: *Harmonielehre im Selbststudium*; Neuausg.; 2006; Breitkopf & Härtel; Wiesbaden; ISBN 376510261X; Mit Notenbeispielen.
[729] Kellert, Peter; Fritsch, Markus: *Arrangieren und Produzieren*; 4., überarb. Aufl.; 2005; Leu; Bergisch-Gladbach; ISBN 3928825224; Musikarbeitsbuch mit CD.
[730] Martinus: *Das Dritte Testament - Livets Bog 2*; 1. Aufl.; 2001; Martinus Verlag; Ockenfels; ISBN 3938189312; Martinus-Institut Kopenhagen.
[731] Martinus: *Das Dritte Testament - Das ewige Weltbild 1*; 1. Aufl.; 1988; Martinus Verlag; Ockenfels; ISBN 3938189371; Martinus-Institut Kopenhagen.
[732] Baker, Jill (Hrsg.): *Weltatlas & Länderlexikon*; Gen. Sonderausg.; 2010; Tandem; Königswinter; ohne ISBN; Alle Staaten der Erde mit ausführlichen Artikeln.
[733] Gogh, Vincent van: *Van Gogh*; 1. Aufl.; 2002; Belser; Stuttgart; ISBN 3763024042; Vorwort von Robert Hughes.
[734] Oerter, Rolf; Montada, Leo (Hrsg.): *Entwicklungspsychologie*; 6., vollst. überarb. Aufl.; 2008; Beltz; Weinheim; ISBN 9783621276078; Lehrbuch.
[735] Louis, Dirk: *Visual C++ 2008*; 1. Aufl.; 2008; Markt + Technik; München; ISBN 9783827243232; Das umfassende Handbuch für Programmierer.
[736] Klüver, Henning; Eder, Florian: *Marco Polo Reiseführer Mailand/Lombardei*; 4., akt. Aufl.; 2010; Mairdumont; Ostfildern; ISBN 9783829704847; Mit Reise-Atlas.
[737] Galenschovski, Carmen: *Florenz*; 9. Aufl.; 2007; Baedeker; Ostfildern; ISBN 9783829711517; Reiseführer mit großem Cityplan.
[738] Korte, Karl-Rudolf; Fröhlich, Manuel: *Politik und Regieren in Deutschland*; 3., akt. u. überarb. Aufl.; 2009; Schöningh; Paderborn; ISBN 978382522436; Strukturen, Prozesse, Entscheidungen.
[739] Walter, Wolfgang: *Analysis 2*; 5., erw. Aufl.; 2002; Springer; Berlin; ISBN 3540429530; Mit über 160 Aufgaben und Lösungen.
[740] Henkel, Hans-Olaf: *Der Kampf um die Mitte*; 1. Aufl.; 2007; Droemer; München; ISBN 9783426274231; Mein Bekenntnis zum Bürgertum.
[741] Landers, Dieter; Rogge, Lothar: *Nichtstandard Analysis*; 1. Aufl.; 1994; Springer; Berlin; ISBN 3540571159; Mit 204 Übungsaufgaben.
[742] Schwarz, Hans Rudolf; Köckler, Norbert: *Numerische Mathematik*; 7., überarb. Aufl.; 2009; Vieweg + Teubner; Wiesbaden; ISBN 9783834806833; Mit Online-Service.
[743] Musch, Hans (Hrsg.): *Musik im Gottesdienst - Band 2*; 4., erw. u. verb. Aufl.; 1994; ConBrio; Regensburg; ISBN 3930079224; Musiklehre, Gemeindeliedführung, Neue Geistliche Lieder, Orgelkunde, Stimmbildung, Chorleitung, Kinderchor, Lexikon.
[744] Smyth, Bill: *Computing Patterns in Strings*; 1st Ed.; 2003; Pearson Education; Essex; ISBN 0201398397; Monograph.
[745] Willberg, Brigitte und Hans Peter (Bearb.): *Evangelisches Gesangbuch*; 4., überarb. Aufl.; 2007; Lutherische Verlagsgesellschaft; Kiel; ISBN 9783875031126; Sonderausgabe.
[746] Kinder, Hermann; Hilgemann, Werner: *dtv-Atlas zur Weltgeschichte Band I*; 28. Aufl.; 1994; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ISBN 3423030011; Von den Anfängen bis zur Französischen Revolution.
[747] Dörner, Dietrich: *Bauplan für eine Seele*; 1. Aufl.; 2001; Rowohlt Taschenbuch Verlag; Reinbek; ISBN 3499611937; Science Sachbuch.
[748] Kleis, Constanze: *Gebrauchsanweisung für Frankfurt am Main*; 2. Aufl.; 2010; Piper; München; ISBN 9783492275798; Stadtbeschreibung.
[749] Asendorpf, Jens B.: *Psychologie der Persönlichkeit*; 4., überarb. u. erw. Aufl.; 2007; Springer; Heidelberg; ISBN 9783540716846; Lehrbuch.
[750] Friedman, Thomas L.: *Die Welt ist flach*; 1. Aufl.; 2008; Suhrkamp; Frankfurt; ISBN 9783518459645; Akt. u. erw. Taschenbuchausgabe.
[751] Grune, Dick; Jacobs, Ceriel J. H.: *Parsing Techniques*; 2nd Ed.; 2009; Springer; New York; ISBN 9781441919014; A Practical Guide.
[752] Needham, Tristan: *Visual Complex Analysis*; Reprint; 1998; Oxford University Press; New York; ISBN 9780198534464; Including non-Euclidean geometry.
[753] Rohr, Richard: *Pure Präsenz*; 2. Aufl.; 2010; Claudius; München; ISBN 9783532624135; Sehen lernen wie die Mystiker.
[754] Terwitte, Paulus: *Das Leben findet heute statt!*; 1. Aufl.; 2010; Rowohlt Taschenbuch Verlag; Reinbek; ISBN 9783499624445; Ein Anschlag auf die Vertröstungsgesellschaft.
[755] Schmidt, Robin: *Rudolf Steiner*; 1. Aufl.; 2011; Verlag am Goetheanum; Dornach; ISBN 9783723514238; Skizze seines Lebens.
[756] Asserate, Asfa-Wossen: *Afrika*; 1. Aufl.; 2010; C. H. Beck; München; ISBN 9783406600968; Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten.

[757] Ai, Weiwei: *Macht euch keine Illusionen über mich*; 1. Aufl.; 2011; Galiani; Berlin; ISBN 9783869710495; Der verbotene Blog.
[758] Kristof, Nicholas D.; WuDunn, Sheryl: *Die Hälfte des Himmels*; 1. Aufl.; 2011; C. H. Beck; München; ISBN 9783406621802; Wie Frauen weltweit für eine bessere Zukunft kämpfen.
[759] Haase, Boris: *Relil*; 1. Aufl.; 2011; Epubli; Berlin; ISBN 9783844208726; Religion und Lebensweg.
[760] Bartels, Henning: *Die Piratenpartei*; 1. Aufl.; 2009; Contumax; Berlin; ISBN 9783861990017; Entstehung, Forderungen und Perspektiven der Bewegung.
[761] Jehde, Manfred; Schippen, Michael; Wunsch, Alfred S.: *Faszination Mittelalter*; ohne Angabe; 2011; Lingen; Köln; ohne ISBN; Rätsel und Geheimnisse einer Epoche.
[762] Grund, Stefan; Iken, Matthias; Lauterbach, Jörn et al.: *Hamburger Momente*; 1. Aufl.; 2010; Hamburger Abendblatt; Hamburg; ISBN 9783939716365; 100 Kolumnen mit ganz besonderen Einblicken in den Alltag der Hansestadt.
[763] Gelbaum, Bernard R.; Olmsted, John M. H.: *Counterexamples in Analysis*; Republ., unabr., slightly corr.; 2003; Dover Publications; Mineola, New York; ISBN 9780486428758; Mathematics.
[764] Köhler, Günter: *Analysis*; 1. Aufl.; 2006; Heldermann; Lemgo; ISBN 3885381141; Mit Aufgaben von Jürgen Grahl.
[765] Rudin, Walter: *Reelle und Komplexe Analysis*; 2., verb. Aufl.; 2009; Oldenbourg; München; ISBN 9783486591866; Mathematik.
[766] Gawin, Izabella; Schulze, Dieter: *CityTrip Bremen*; 2., neu bearb. u. kompl. akt. Aufl.; 2010; Reise Know-How Verlag; Bielefeld; ISBN 9783831718641; Reiseführer mit großem CityAtlas.
[767] Höhne, Wieland; Missler, Eva et al.: *Hamburg*; 14. Aufl.; 2009; Baedeker; Ostfildern; ISBN 9783829710336; Reiseführer mit großem Cityplan.
[768] Fröba, Stephanie; Wassermann, Alfred: *Die bedeutendsten Mathematiker*; 1. Aufl.; 2007; Marixverlag; Wiesbaden; ISBN 9783865399168; Biografisch-werkgeschichtliche Porträts.
[769] Woyke, Wichard (Hrsg.): *Handwörterbuch Internationale Politik*; 10., durchges. Aufl.; 2006; Budrich; Opladen; ISBN 9783825207021; Politikwissenschaft.
[770] Werth, Reinhard: *Die Natur des Bewusstseins*; 1. Aufl.; 2010; Beck; München; ISBN 9783406605949; Wie Wahrnehmung und freier Wille im Gehirn entstehen.
[771] Hörmander, Lars: *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*; 2nd Ed.; 1973; North-Holland; Amsterdam; ohne ISBN; Mathematics.
[772] Fritzsche, Klaus; Grauert, Hans: *From Holomorphic Functions to Complex Manifolds*; 1st Ed.; 2002; Springer; New York; ISBN 0387953957; Graduate Texts in Mathematics.
[773] Wells, Raymond O. Jr.: *Differential Analysis on Complex Manifolds*; 3rd Ed.; 2008; Springer; New York; ISBN 9781441925350; Graduate Texts in Mathematics.
[774] Müller-Burzler, Henning: *Auf den Spuren der Methusalem-Ernährung*; 7. Aufl.; 2011; Windpferd; Oberstdorf; ISBN 9783893854370; Die Wiederentdeckung der Heil- und Aufbaukräfte der Nahrung.
[775] Vanderbei, Robert J.: *Linear Programming*; 3rd Ed.; 2008; Springer; New York; ISBN 9780387743875; Foundations and Extensions.
[776] Bazaraa, Mokhtar S.; Sherali, Hanif D.; Shetty, C. M.: *Nonlinear Programming*; 3rd Ed.; 2006; Wiley; Hoboken; ISBN 9780471486008; Theory and Algorithms.
[777] Dantzig, George B.: *Lineare Programmierung und Erweiterungen*; 1. Aufl.; 1966; Springer; Berlin; ASIN B0000BQFZ8; Ökonomie und Unternehmungsforschung II.
[778] Reichardt, Sven; Zierenberg, Malte: *Damals nach dem Krieg*; 1. Aufl.; 2009; Goldmann; München; ISBN 9783442155743; Eine Geschichte Deutschlands 1945 bis 1949.
[779] Weyl, Hermann: *The Concept of a Riemann Surface*; 3rd Ed.; 2009; Dover Publications; Mineola, New York; ISBN 9780486470047; Mathematics.
[780] Edwards, Harold M.: *Riemann's Zeta Function*; 1st Ed.; 2001; Dover Publications; Mineola, New York; ISBN 9780486417400; Mathematics.
[781] Steen, Lynn Arthur; Seebach, J. Arthur Jr.: *Counterexamples in Topology*; 2nd Ed.; 1995; Dover Publications; Mineola, New York; ISBN 9780486687353; Mathematics.
[782] Querenburg, Boto von: *Mengentheoretische Topologie*; 3., neu bearb. u. erw. Aufl.; 2001; Springer; Berlin; ISBN 3540677909; Mit 30 Abbildungen.
[783] Maros, István: *Computational Techniques of the Simplex Method*; 1st Ed.; 2003; Kluwer; Boston; ISBN 1402073321; Operations Research.
[784] Königsberger, Konrad: *Analysis 2*; 5., korr. Aufl.; 2004; Springer; Berlin; ISBN 3540203893; Mit 150 Abbildungen.
[785] Storch, Uwe; Wiebe, Hartmut: *Lehrbuch der Mathematik - Band 2: Lineare Algebra*; 2., korr. Aufl.; 2010; Spektrum; Heidelberg; ISBN 9783827426673; Akademischer Verlag.

[786] Storch, Uwe; Wiebe, Hartmut: *Lehrbuch der Mathematik - Band 4: Analysis auf Mannigfaltigkeiten - Funktionentheorie - Funktionalanalysis*; 1. Aufl.; 2011; Spektrum; Heidelberg; ISBN 9783827427670; Akademischer Verlag.
[787] Gottwald, Siegfried; Ilgauds, Hans-Joachim; Schlote, Karl-Heinz (Hrsg.): *Lexikon bedeutender Mathematiker*; 1. Aufl.; 1990; Bibliographisches Institut; Leipzig; ISBN 3323003195; Kurzbiografien.
[788] Ribenboim, Paulo: *Die Welt der Primzahlen*; 2., vollst. überarb. u. akt. Aufl.; 2011; Springer; Berlin; ISBN 9783642180781; Geheimnisse und Rekorde.
[789] Vollendorf, Maximilian; Bongers, Frank: *jQuery*; 2., akt. u. erw. Aufl.; 2011; Galileo Computing; Bonn; ISBN 9783836218108; Das Praxisbuch.
[790] Edmüller, Andreas; Wilhelm, Thomas: *Manipulationstechniken*; 2., akt. Aufl.; 2012; Haufe; Freiburg; ISBN 9783648026373; So wehren Sie sich.
[791] Hansen, Eric T.: *Planet America*; 1. Aufl.; 2012; Bastei Lübbe; Köln; ISBN 9783404606924; Ein Ami erklärt sein Land.
[792] Gowers, Timothy (Ed.): *The Princeton Companion to Mathematics*; 1st Ed.; 2008; Princeton University Press; Princeton; ISBN 9780691118802; Mathematics.
[793] Buchholz, Antje: *Prag*; 20. Aufl.; 2012; Mairdumont; Ostfildern; ISBN 9783829725828; Marco Polo Reiseführer.
[794] Cormen, Thomas H.; Leiserson, Charles E.; Rivest, Ronald; Stein, Clifford: *Algorithmen - Eine Einführung*; 3., überarb. u. erw. Aufl.; 2010; Oldenbourg; München; 9783486590029; Aus dem Englischen von Paul Molitor.
[795] Turau, Volker: *Algorithmische Graphentheorie*; 3. Aufl.; 2009; Oldenbourg; München; 9783486590579; Studierende der Informatik und Mathematik.
[796] Waite, Mitchell; Prata, Stephen: *The Waite Group's New C Primer Plus*; 1st Ed.; 1990; SAMS; North College; 0672226871; Covers ANSI C, UNIX, Microsoft C, and Turbo C.
[797] Lippman, Stanley B.; Lajoie, Josée; Moo, Barbara E.: *C++ Primer*; 5th Ed.; 2012; Addison-Wesley; Upper Saddle River; 9780321714114; Completely Rewritten for the New C++11 Standard.
[798] Serges Verlag: *Sissi: Wahrheit und Legende*; 1. Aufl.; 2013; IDIONeBOOK; Solingen; 9783942343237; Kindle Edition.
[799] Blum, Lenore; Cucker, Felipe; Shub, Michael; Smale, Steve: *Complexity and Real Computation*; 1st Ed.; 1997; Springer; New York; ISBN 9780387982816; With a foreword by Richard M. Karp.
[800] Borwein, Jonathan; Bailey, David; Girgensohn, Roland: *Experimentation in Mathematics*; 1st Ed.; 2004; Peters; Natick; ISBN 1568811365; Computational Paths to Discovery.
[801] Gregor-Dellin, Martin: *Richard Wagner*; Ungek. Taschenbuchausg.; 2013; Piper; München; ISBN 9783492301879; Sein Leben • Sein Werk • Sein Jahrhundert.
[802] Knopp, Konrad: *Theory and Application of Infinite Series*; 1st Ed.; 2013; Dover Publications; New York; ASIN B00C59C71E; Translated from the Second German Edition and revised in accordance with the Fourth.
[803] Many, Christopher: *Hinter dem Horizont links*; 6. Aufl.; 2011; Delius Klasing; Bielefeld; 9783768833486; Acht Jahre mit dem Land Rover um die Welt.
[804] Volz, Heinz: *Überleben in Natur und Umwelt*; 15., akt. Aufl.; 2012; Walhalla; Regensburg; 9783802964374; Mit Übungs- und Ausbildungsplan sowie ABC-Teil.
[805] Plehwe; Kerstin: *Die Weisheit der Elefanten*; Kindle; 2013; Piper; München; ASIN B00F52O1H6; Was ich als Rangerin im Krüger-Nationalpark fürs Leben lernte.
[806] Irmscher, Almut: *Das Italien-Lesebuch*; Kindle; 2013; CreateSpace; North Charleston; ASIN B00B058BTG; Impressionen aus dem Land der Sehnsucht.
[807] Burghardt, Peter: *Gebrauchsanwesiung für Brasilien*; 1. Aufl.; 2013; Piper; München; ASIN B00CXTY0KC; Kindle Edition.
[808] Strittmatter, Kai: *Gebrauchsanweisung für Istanbul*; 6. Aufl.; 2010; Piper; München; ASIN B004ZWFAB8; Kindle Edition.
[809] Steyer, Ralph: *Jetzt lerne ich AJAX*; 1. Aufl.; 2007; Markt + Technik; München; ISBN 9783827242259; inkl. CD mit Beispielen: Ihr einfacher Einstieg in Web 2.0.
[810] Kaku, Michio: *Die Physik der Zukunft: Unser Leben in 100 Jahren*; 1. Aufl.; 2013; Rowohlt; Reinbek; ASIN B00GRK0R9G; E-Book.
[811] Sonar, Thomas: *3000 Jahre Analysis*; 1. Aufl.; 2011; Springer; Berlin; ISBN 9783642172038; Geschichte, Kulturen, Menschen (Vom Zählstein zum Computer).
[812] Krauss, Lawrence M.: *Ein Universum aus Nichts*; 1. Aufl.; 2013; Knaus; München; ASIN B00AS8WNLS; ... und warum da trotzdem etwas ist.
[813] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis Teil 1*; 17., akt. Aufl.; 2009; Vieweg + Teubner; Wiesbaden; ISBN 9783834807779; Mit 127 Abbildungen, 811 Aufgaben, zum Teil mit Lösungen.

[814] Wendland, Wolfgang L.; Steinbach, Olaf: *Analysis*; 1. Aufl.; 2005; Teubner; Wiesbaden; ISBN 9783519005179; Integral- und Differentialrechnung, gewöhnliche Differentialgleichungen, komplexe Funktionentheorie.
[815] Rudin, Walter: *Functional Analysis*; 2nd Ed.; 2006; McGraw Hill Education; New Delhi; ISBN 9780070619883; International Series in Pure and Applied Mathematics.
[816] Freitag, Eberhard; Busam, Rolf: *Funktionentheorie 1*; 4., korr. u. erw. Aufl.; 2006; Springer; Berlin; ISBN 9783540317647; Mit 125 Abbildungen und Lösungshinweisen zu 420 Übungsaufgaben.
[817] Freitag, Eberhard: *Funktionentheorie 2*; 1. Aufl.; 2009; Springer; Berlin; ISBN 9783540878964; Riemann'sche Flächen, mehrere komplexe Variable, Abel'sche Funktionen, höhere Modulformen.
[818] Dodd, Susan: *Autismus*; 1. Aufl.; 2007; Spektrum Akademischer Verlag; Heidelberg; ISBN 9783827428394; Was Betreuer und Eltern wissen müssen.
[819] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis Teil 2*; 14., überarb. Aufl.; 2008; Vieweg + Teubner; Wiesbaden; ISBN 9783835102088; Mit 102 Abbildungen, 633 Aufgaben, zum Teil mit Lösungen.
[820] Boehm, Peter: *Afrika Quer*; 1. Aufl.; 2003; CreateSpace; Luxemburg; ASIN B00BBW1HSK; Reise.
[821] Fabian, Frank: *Die größten Lügen der Geschichte*; 1. Aufl.; 2014; Kindle; Luxemburg; ASIN B00IGWSU9C; Wie "historische Wahrheiten" gefälscht wurden.
[822] Louis, Dirk; Müller, Peter: *Java 7*; 1. Aufl.; 2011; Markt + Technik; München; ISBN 9783827243539; Das Handbuch.
[823] Kaesler, Dirk: *Max Weber*; 1. Aufl.; 2014; C. H. Beck; München; ISBN 9783406660757; Eine Biographie.
[824] Gieseke, Wolfram: *Das große PC-Lexikon*; 16. Aufl.; 2011; Data Becker; Düsseldorf; ISBN 9783815830833; Ihr Wegweiser durch den Hightech-Dschungel.
[825] Erlhofer, Sebastian: *Suchmaschinen-Optimierung*; 7., akt. u. erw. Aufl.; 2014; Galileo Computing; Bonn; ISBN 9783836228824; Das umfassende Handbuch.
[826] Storch, Uwe; Wiebe, Hartmut: *Lehrbuch der Mathematik - Band 1: Analysis einer Veränderlichen*; 3. Aufl.; 2010; Spektrum; Heidelberg; ISBN 9783827425744; Akademischer Verlag.
[827] Storch, Uwe; Wiebe, Hartmut: *Lehrbuch der Mathematik - Band 3: Analysis mehrerer Veränderlicher - Integrationstheorie*; 1. korr. Aufl.; 2010; Spektrum; Heidelberg; ISBN 9783827427458; Akademischer Verlag.
[828] Amnesty International (Hrsg.): *Amnesty International Report 2013*; 1. Aufl.; 2013; Fischer; Frankfurt am Main; ISBN 9783100008374; Zur weltweiten Lage der Menschenrechte.
[829] Riedenauer, Markus; Tschirf, Andrea: *Zeitmanagement und Selbstorganisation in der Wissenschaft*; 1. Aufl.; 2012; facultas.wuv; Wien; ISBN 9783825236687; Ein selbstbestimmtes Leben in Balance.
[830] Sakurai, Heiko: *Die schwarze Witwe*; 1. Aufl.; 2013; Schaltzeit; Berlin; ISBN 9783941362338; Cartoons des Jahres.
[831] Lehmann, Peter; Stastny, Peter (Hrsg.): *Statt Psychiatrie 2*; 1. Aufl.; 2014; Peter Lehmann Antipsychiatrieverlag; Berlin; ASIN B00K1AQ3CS; Vorwort von Robert Whitaker.
[832] Kaiser, Joachim: *Sprechen wir über Musik*; 1. Aufl.; 2012; Siedler; München; ASIN B00A6Y92FE; Eine kleine Klassik-Kunde.
[833] Bessler, Jeromy; Opgenoorth, Norbert: *Was ist eigentlich klassische Musik?*; 1. Aufl.; 2013; CreateSpace; Luxemburg; ASIN B006UMLST4; Musik.
[834] Opgenoorth, Norbert; Bessler, Jeromy: *Anekdoten aus der Musikwelt*; 1. Aufl.; 2013; CreateSpace; Luxemburg; ASIN B006T5JXS0; Musik.
[835] Bessler, Jeromy; Opgenoorth, Norbert: *Meister der klassischen Musik*; 2. Aufl.; 2003; Voggenreiter; Bonn; ASIN B0071F3ADG; Musik.
[836] Kaspar, Peter Paul: *Die wichtigsten Musiker im Porträt*; 1. Aufl.; 2012; Marixverlag; Wiesbaden; ISBN 9783843802147; Biografisch-werkgeschichtliche Porträts.
[837] Rosenberger, Marc: *Die moderne Klavierschule Band 1*; 1. Aufl.; 2013; CreateSpace; Luxemburg; ASIN B00GNT3VT4; Musik.
[838] Deitmar, Anton: *Analysis*; 1. Aufl.; 2014; Springer; Berlin; ISBN 9783642548093; Lehrbuch.
[839] Jänich, Klaus: *Vektoranalysis*; 5. Aufl.; 2005; Springer; Berlin; ISBN 9783540237419; Mit 110 Figuren, 120 Testfragen und 52 Übungsaufgaben.
[840] Arntz, Jochen: *1964*; 1. Aufl.; 2013; Süddeutsche Zeitung Edition; München; ISBN 9783864971549; Deutschlands stärkster Jahrgang.
[841] Lundy, Miranda: *Quadrivium*; 1. Aufl.; 2014; Librero; Kerkdriel; ISBN 9789089984296; Die vier klassischen freien Künste: Arithmetik, Geometrie, Musik & Astronomie.
[842] Haase, Boris: *Nichtstandardmathematik*; 1. Aufl.; 2014; Calaméo; Paris; ohne ISBN; Online-Publikation.
[843] Klein, Stefan: *Träume*; 1. Aufl.; 2014; Fischer E-Books; Frankfurt am Main; ASIN B00K64PIDY; Eine Reise in unsere innere Wirklichkeit.

[844] Korff, Malte: *Wörterbuch der Musik*; 4., durchges. u. erw. Aufl.; 2010; Reclam; Stuttgart; ISBN 9783150187340; Mit 106 Abbildungen und 72 Notenbeispielen.
[845] Csampai, Attila; Holland, Dietmar (Hrsg.): *Der Konzertführer*; 1. Aufl.; 1987; Wunderlich; Reinbek; ISBN 3805204507; Orchestermusik von 1700 bis zur Gegenwart.
[846] Zamoyski, Adam: *Chopin*; 1. Aufl.; 2014; btb; München; ISBN 9783442748068; Der Poet am Piano.
[847] Amon, Reinhard: *Lexikon der Harmonielehre*; 1. Aufl.; 2005; Metzler; Stuttgart; ISBN 3476020827; Nachschlagewerk zur durmolltonalen Harmonik mit Analysechiffren für Funktionen, Stufen und Jazzakkorde.
[848] Ruf, Wolfgang (Hrsg.): *Riemann Musiklexikon in 5 Bänden*; 13., akt. Neuaufl.; 2012; Schott; Mainz; ISBN 9783795700065; A-Domh / Domi-Kann / Kano-Nirv / Niss-Schw / Scia-Zyli.
[849] Brühl, Daniel; Cáceres, Javier: *Ein Tag in Barcelona*; 1. Aufl.; 2012; Ullstein; Berlin; ASIN B005Q8QYKG; Kindle Edition.
[850] Reder, Ewald: *Sergej Rachmaninow - Leben und Werk (1873-1943)*; 3., überarb. u. aktualis. Neuaufl.; 2007; Triga; Gründau-Rothenbergen; ISBN 9783897744868; Mit umfassendem Werk- und Repertoireverzeichnis.
[851] Korff, Malte: *Johannes Brahms: Leben und Werk*; 1. Aufl.; 2009; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ASIN B004UFTR6Y; Biografie.
[852] Härtling, Peter: *Schubert*; 1. Aufl.; 2009; Kiepenheuer & Witsch; Köln; ASIN B004WNZ2BI; Biografischer Roman.
[853] Huss, Frank: *Joseph Haydn - Das unterschätzte Genie*; 1. Aufl.; 2013; Hollitzer Wissenschaftsverlag; Wien; ASIN B00FZ1KKHW; Biografie.
[854] Geck, Martin: *Robert Schumann - Mensch und Musiker der Romantik*; 2. Aufl.; 2010; Siedler; München; ASIN B004P1JA9M; Biografie.
[855] Gilliam, Bryan: *Richard Strauss - Magier der Töne*; 1. Aufl.; 2014; C. H. Beck; München; ASIN B00JPXZA6W; Biografie.
[856] Hilmes, Oliver: *Liszt - Biographie eines Superstars*; 1. Aufl.; 2011; Siedler; München; ASIN B004T1862U; Musikliteratur.
[857] Fuld, Werner: *Der Teufelsgeiger Nicolo Paganini*; 2. Aufl.; 2013; Schöffling; Frankfurt am Main; ASIN B00B0YHNCS; Biografie.
[858] Cott, Jonathan: *Leonard Bernstein - Kein Tag ohne Musik*; 1. Aufl.; 2012; C. Bertelsmann; Gütersloh; ASIN B008A0RH08; Edition Elke Heidenreich.
[859] Johler, Jens: *Die Stimmung der Welt - Der Bach-Roman*; 1. Aufl.; 2014; Alexander; Berlin; ASIN B00F4YLJES; Musikliteratur.
[860] Fladt, Hartmut: *Der Musikversteher - Was wir fühlen, wenn wir hören*; 1. Aufl.; 2013; Aufbau Digital; Berlin; ASIN B008XG3I8O; Musikliteratur.
[861] Barenboim, Daniel: *Musik ist alles und alles ist Musik*; 1. Aufl.; 2014; Berlin; Berlin; ASIN B00GWEZN3M; Erinnerungen und Einsichten.
[862] Kindle Direct Publishing: *Erstellung eines Kindle-Buches*; 1. Aufl.; 2014; Amazon; Seattle; ASIN B008A3UOIM; KDP.
[863] Resag, Jörg: *Die Entdeckung des Unteilbaren*; 2. Aufl.; 2013; Springer; Berlin; ASIN B00GXKEK2U; Quanten, Quarks und die Entdeckung des Higgs-Teilchens.
[864] Hickey, Robert: *Honor & Respect*; Exp. and Upd. 2nd Ed.; 2013; Protocol School of Washington; Columbia; ISBN 9780989188609; The Official Guide to Names, Titles, & Forms of Address.
[865] Lenz, Siegfried: *Das Wunder von Striegeldorf*; 1. Aufl.; 2013; Hoffmann und Campe; Hamburg; ISBN 9783455380835; Eine Weihnachtsgeschichte.
[866] Dankmeier, Wilfried: *Grundkurs Codierung*; 3. Aufl.; 2007; Vieweg + Teubner; Wiesbaden; ASIN B001B7D52G; Verschlüsselung, Kompression, Fehlerbeseitigung.
[867] Strutz, Tilo: *Bilddatenkompression*; 4. Aufl.; 2009; Vieweg + Teubner; Wiesbaden; ISBN 9783834899866; Grundlagen, Codierung, Wavelets, JPEG, MPEG, H.264.
[868] Jähne, Bernd: *Digitale Bildverarbeitung und Bildgewinnung*; 7., neu bearb. Aufl.; 2012; Springer; Berlin; ISBN 9783642049514; Heidelberg Collaboratory for Image Processing HCI.
[869] Barnsley, Michael F.; Hurd, Lyman P.: *Fractal Image Compression*; 2nd Ed.; 1993; AK Peters; Wellesley; ISBN 1568810008; Illustrations by Louisa F. Anson.
[870] Marsden, Jerrold E.; Tromba, Anthony: *Vector Calculus*; 6th Ed.; 2012; Palgrave Macmillan; Houndmills; ISBN 9781429224048; International Edition.
[871] Korff, Malte: *Tschaikowsky*; 1. Aufl.; 2014; Deutscher Taschenbuch Verlag; München; ASIN B00K0NE378; Leben und Werk.
[872] Schwandt, Christoph: *Carl Maria von Weber in seiner Zeit*; 1. Aufl.; 2014; Schott Music; Mainz; ASIN B00QTN4Y2W; Eine Biografie.

[873] Watson, Peter: *Ideen*; 1. Aufl.; 2013; Goldmann Verlag; München; ASIN B00BJSJR1A; Eine Kulturgeschichte von der Entdeckung des Feuers bis zur Moderne.
[874] Watson, Peter: *Das Lächeln der Medusa*; 1. Aufl.; 2013; C. Bertelsmann; Gütersloh; ASIN B00GOGC2SW; Die Geschichte des modernen Wissens.
[875] Caeyers, Jan: *Beethoven*; 1. Aufl.; 2012; C. H. Beck; München; ASIN B007GGK6P0; Der einsame Revolutionär.
[876] Jarrett, Scott; Day, Holly: *Komponieren für Dummies*; 1. Aufl.; 2013; Wiley-VCH; Weinheim; ISBN 9783527709793; Musikliteratur.
[877] Golub, Gene H.; van Loan, Charles F.: *Matrix Computations*; 3rd Ed.; 1996; Johns Hopkins University Press; Baltimore; ISBN 0801854148; Computer Science.
[878] Schwalgin, Stefan: *Finale 2014*; 1. Aufl.; 2013; Klemm Music Technology; Ziegenhagen; ISBN 9783938259597; Einstieg in die Praxis.
[879] Steyer, Ralph: *Erfolgreich Java 7 programmieren*; 1. Aufl.; 2012; Addison-Wesley; München; ISBN 9783827326584; Programmierung.
[880] Künneth, Thomas: *Einstieg in Eclipse*; 5., akt. Aufl.; 2014; Galileo Computing; Bonn; ISBN 9783836229586; Die Werkzeuge für Java-Entwickler.
[881] Follett, Ken: *Der dritte Zwilling*; 7. Aufl.; 1999; Bastei Lübbe; Köln; ISBN 9783404129423; Aus dem Englischen von Wolfgang Neuhaus, Lore Strassl und Till R. Lohmeyer.
[882] Walter, Wolfgang: *Einführung in die Theorie der Distributionen*; 3. Aufl.; 1994; Bibliographisches Institut; Mannheim; ISBN 9783411170234; Vollständige überarbeitete und erweiterte Auflage.
[883] Pasternak, Boris: *Doktor Schiwago*; 1. Aufl.; 2011; Springer; Berlin; ISBN 9783942656238; Nobelpreis für Literatur 1958.
[884] Schaefer, Hansjürgen (Hrsg.): *Konzertbuch Orchestermusik A - F*; 6., unveränd. Aufl.; 1987; Dt. Verl. für Musik; Leipzig; ISBN 3370000350; Begründet von Karl Schönewolf.
[885] Schaefer, Hansjürgen (Hrsg.): *Konzertbuch Orchestermusik G - O*; 6., unveränd. Aufl.; 1987; Dt. Verl. für Musik; Leipzig; ISBN 3370000369; Begründet von Karl Schönewolf.
[886] Schaefer, Hansjürgen (Hrsg.): *Konzertbuch Orchestermusik P - Z*; 6., unveränd. Aufl.; 1987; Dt. Verl. für Musik; Leipzig; ISBN 3370000377; Begründet von Karl Schönewolf.
[887] Borwein, Peter; Choi, Stephen; Rooney, Brendan (Eds.) et al.: *The Riemann Hypothesis*; 1st Ed.; 2008; Springer; Berlin; ISBN 9780387721255; A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike.
[888] Schöllgen, Gregor: *Gerhard Schröder*; 1. Aufl.; 2015; Deutsche Verlags-Anstalt; München; ISBN 9783421046536; Die Biographie.
[889] Guy, Richard K.: *Unsolved Problems in Number Theory*; 3rd Ed.; 2004; Springer; New York; ISBN 9780387209602; With 18 Figures.
[890] Jünger, Michael; Liebling, Thomas; Naddef, Denis et al. (Ed.): *50 Years of Integer Programming 1958 - 2008*; 1st Ed.; 2010; Springer; Berlin; ISBN 9783540682745; With DVD Video.
[891] Köhler, Henning: *Helmut Kohl: Ein Leben für die Politik*; 1. Aufl.; 2014; Bastei Lübbe; Köln; ASIN B00N7BN8GC; Die Biografie.
[892] Oldham, Keith B.; Spanier, Jerome: *The Fractional Calculus*; Corr. Republ.; 2006; Dover; Mineola; ISBN 9780486450018; Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order.
[893] Geiger, Carl; Kanzow, Christian: *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*; 1. Aufl.; 2002; Springer; Berlin; ISBN 9783540427902; Mit 140 Übungsaufgaben.
[894] Künzi, H. P.; Krelle, W.; Randow, R. von: *Nichtlineare Programmierung*; 2., neubarb. u. erw. Aufl.; 1979; Springer; Berlin; ISBN 3540093430; Unter Mitwirkung von W. Oettli.
[895] Zoutendijk, Guus: *Mathematical Programming Methods*; 1st Ed.; 1976; North-Holland; Amsterdam; ISBN 0444110690; To Adelheid, my global optimum.
[896] Springer, Christian: *Giuseppe Verdi. Leben, Werke, Interpreten*; 1. Aufl.; 2013; Epubli; Berlin; EAN 9783844240665; Biographie.
[897] Holler, Ingrid: *Trainingsbuch Gewaltfreie Kommunikation*; 6. Aufl.; 2012; Junfermann; Paderborn; ISBN 9783873875388; Abwechslungsreiche Übungen für Selbststudium, Seminare & Übungsgruppen.
[898] Biegel, Gerd; Klein, Angela; Sonar, Thomas (Hrsg.): *Leonhard Euler*; 1. Aufl.; 2008; Braunschweigisches Landesmuseum; Braunschweig; ISBN 9783927939790; Mathematiker - Mechaniker - Physiker.
[899] Rosenberg, Marshall B.: *Gewaltfreie Kommunikation*; 2. Aufl.; 2011; Junfermann; Paderborn; ISBN 9783873878013; Eine Sprache des Lebens.
[900] Deiser, Oliver: *Einführung in die Mengenlehre*; 1. Aufl.; 2002; Springer; Berlin; ISBN 3540429484; Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo.
[901] Lermer, Stephan; Kunow, Ilonka: *Small Talk*; 2., akt. Aufl.; 2011; Haufe; Freiburg; ISBN 9783648023440; Nie wieder sprachlos.
[902] Rardin, Ronald L.: *Optimization in Operations Research*; 1st Ed.; 2014; Pearson; Essex; ISBN 9781292042473; Always learning.

[903] Chvátal, Vašek: *Linear Programming*; 1st Ed.; 1983; Freeman; New York; ISBN 0716715872; Operations Research.
[904] Kühn, Hellmut: *Musikgeschichte*; 1. Aufl.; 1997; Quadriga; Weinheim; ISBN 3886791440; Bd. 1 - Klassische und romantische Musik: 1750 - 1880.
[905] Harnoncourt, Nikolaus: *Töne sind höhere Worte*; 1. Aufl.; 2007; Residenz; St. Pölten; ISBN 9783701730551; Gespräche über romantische Musik.
[906] Twain, Mark: *Meine geheime Autobiographie*; Lizenzausg.; 2016; Anaconda; Köln; ISBN 9783730603253; Mit einem Vorwort von Rolf Vollmann.
[907] Hochstättler, Winfried: *Algorithmische Mathematik*; 1. Aufl.; 2010; Springer; Berlin; ISBN 9783642054211; Mathematik.
[908] Conforti, Michele; Cornuéjols, Gérard; Zambelli, Giacomo: *Integer Programming*; 1st Ed.; 2014; Springer; New York; ISBN 9783319110073; Graduate Texts in Mathematics.
[909] Kanigel, Robert: *Der das Unendliche kannte*; 1. Aufl.; 1993; Vieweg; Braunschweig; ISBN 3528065095; Das Leben des genialen Mathematikers Srinivasa Ramanujan.
[910] Follett, Ken: *Die Säulen der Erde*; 1. Aufl.; 2015; Bastei Lübbe; Köln; ISBN 9783404171651; Historischer Roman.
[911] Ernesti, Johannes; Kaiser, Peter: *Python 3*; 4., akt. u. erw. Aufl.; 2015; Rheinwerk; Bonn; ISBN 9783836236331; Das umfassende Handbuch.
[912] Bredon, Glen E.: *Topology and Geometry*; 1st Ed.; 2002; Springer; New York; ISBN 9781441931030; Graduate Texts in Mathematics.
[913] Follett; Ken: *Die Leopardin*; 1. Aufl.; 2016; Bastei Lübbe; Köln; ISBN 9783404173402; Roman.
[914] Maierhofer, Lorenz; Kern, Walter: *Sing & Swing*; 1. Aufl.; 2015; Helbling; Innsbruck; ISBN 9783862271641; Das Liederbuch.
[915] Kowalsky, Hans-Joachim: *Topologische Räume*; 1. Aufl.; 1961; Birkhäuser; Basel; ISBN 9783764302290; Mathematische Reihe Band 26.
[916] Pan, Ping-Qi: *Linear Programming Computation*; 1st Ed.; 2014; Springer; New York; ISBN 9783642407536; Mathematics.
[917] Griva, Igor; Nash, Stephen G.; Sofer, Ariela: *Linear and Nonlinear Optimization*; 2nd Ed.; 2009; Siam; Philadelphia; ISBN 9780898716610; Mathematics.
[918] Korte, Bernhard; Vygen, Jens: *Kombinatorische Optimierung*; 2. Aufl.; 2012; Springer; Heidelberg; ISBN 9783642254017; Theorie und Algorithmen.
[919] Wegener; Ingo: *Komplexitätstheorie*; 1. Aufl.; 2003; Springer; Berlin; ISBN 3540001611; Grenzen der Effizienz von Algorithmen.
[920] Karmasin, Matthias; Ribing, Rainer: *Die Gestaltung wissenschaftlicher Arbeiten*; 9. Aufl.; 2017; Facultas; Wien; ISBN 9783846348222; Ein Leitfaden für Facharbeit/VWA, Seminararbeiten, Bachelor-, Master-, Magister- und Diplomarbeiten sowie Dissertationen.
[921] Savorgnani, Giulia de; Bergero, Beatrice: *Chiaro!*; 2. Aufl.; 2011; Hueber; Ismaning; ISBN 9783192054273; Der Italienischkurs A1.
[922] Savorgnani, Giulia de; Bergero, Beatrice: *Chiaro!*; 1. Aufl.; 2011; Hueber; Ismaning; ISBN 9783190054497; Der Italienischkurs A2.
[923] Gorini, Umberto: *Langenscheidt Komplett-Grammatik Italienisch*; 1. Aufl.; 2015; Langenscheidt; München; ISBN 9783468348686; Das Standardwerk zum Nachschlagen und Trainieren.
[924] Jänich, Klaus: *Topologie*; 8. Aufl.; 2005; Springer; Berlin; ISBN 3540213937; Mit 182 Abbildungen.
[925] Schade, Heinz; Neemann, Klaus: *Tensoranalysis*; 3., überarb. Aufl.; 2009; de Gruyter; Berlin; ISBN 9783110206968; Lehrbuch der Mathematik.
[926] Missler, Eva (Bearb.): *Toskana*; 17. Aufl.; 2014; Baedeker; Ostfildern; ISBN 9783829714730; Reiseführer mit großer Reisekarte.
[927] Wagner, Jürgen: *Einblicke in die euklidische und nichteuklidische Geometrie*; 1. Aufl.; 2017; Springer; Berlin; ISBN 9783662540718; Verständlich erklärt vom Abiturniveau aus.
[928] Klee, Victor; Wagon, Stan: *Alte und neue ungelöste Probleme in der Zahlentheorie und Geometrie der Ebene*; 1. Aufl.; 1997; Springer; Basel; ISBN 9783764353087; Aus dem Amerikanischen von Manfred Stern.
[929] Follett, Ken: *Der Modigliani-Skandal*; 1. Aufl.; 2017; Bastei Lübbe; Köln; ISBN 9783404174539; Aus dem Englischen von Günter Panske.
[930] Follett, Ken: *Sturz der Titanen*; 14. Aufl.; 2012; Bastei Lübbe; Köln; ISBN 9783404166602; Mit Illustrationen von Tina Dreher.
[931] Croft, Hallard T.; Falconer, Kenneth J.; Guy, Richard K.: *Unsolved Problems in Geometry*; Reprint of 1st Ed.; 2013; Springer; New York; ISBN 9781461269625; With 66 figures.
[932] Fel'dman, N. I.; Nesterenko, Yu. V.: *Transcendental Numbers*; 1st Ed.; 1998; Springer; Berlin; ISBN 9783540614678; Number Theory IV.

[933] Klein, Felix: *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*; Reprint of 1st Ed.; 1967; Springer; Berlin; ISBN 9783642950278; Mit 237 Abbildungen.
[934] Maurer, Bertram: *Mathematik*; 1. Aufl.; 2017; Naumann & Göbel; Köln; ISBN 9783625179856; Die faszinierende Welt der Zahlen.
[935] Hirsch, Eike Christian: *Der berühmte Herr Leibniz*; 1. Aufl.; 2016; C. H. Beck; München; ASIN B01KR6DL9S; Eine Biographie.
[936] Benker, Hans: *Mathematica kompakt*; 1. Aufl.; 2016; Springer Vieweg; Berlin; ISBN 9783662496114; Mathematische Problemlösungen für Ingenieure, Mathematiker und Naturwissenschaftler.
[937] Aho, Alfred V.; Lam, Monica S.; Sethi, Ravi; Ullman, Jeffrey D.: *Compilers*; 2nd Ed.; 2017; Pearson India; London; ISBN 9789332518667; Principles, Techniques, and Tool.
[938] Tegmark, Max: *Leben 3.0*; 1. Aufl.; 2017; Ullstein; Berlin; ISBN 9783843716703; Mensch sein im Zeitalter Künstlicher Intelligenz.
[939] Bertsekas, Dimitri P.: *Nonlinear Programming*; 3rd Ed.; 2016; Athena Scientific; Belmont; ISBN 9781886529052; Massachusetts Institute of Technology.
[940] Dambeck, Holger: *Kommen drei Logiker in eine Bar ...*; 2. Aufl.; 2017; Kiepenheuer & Witsch; Köln; ISBN 9783462050516; Die schönsten Mathe-Rätsel.
[941] Koecher, Max; Krieg, Aloys: *Ebene Geometrie*; 3., neu bearb. u. erw. Aufl.; 2007; Springer; Berlin; ISBN 9783540493273; Mit 109 Abbildungen.
[942] Balbaert, Ivo; Sengupta, Avik; Sherrington, Malcolm: *Julia: High Performance Programming*; 1st Ed.; 2016; Packt Publishing; Birmingham; ASIN B01MXS4IPT; Learning Path.
[943] Kwon, Changhyun: *Julia Programming for Operations Research*; 3rd Printing with Updates; 2017; CreateSpace; North Charleston; ASIN B01GBEBJ0S; A Primer on Computing.
[944] Aczél, János D.: *Lectures on Functional Equations and Their Applications*; Unabr. republ.; 2006; Dover; Mineola; ISBN 9780486445236; Translated by Scripta Technica Inc.
[945] Hermann, Martin: *Numerische Mathematik*; 3., überarb. u. erw. Aufl.; 2011; Oldenbourg; München; ISBN 9783486708202; Mit 41 Abbildungen.
[946] Calinger, Ronald S.: *Leonhard Euler*; 1st Ed.; 2015; Princeton University Press; Princeton; ASIN B00UCIEYI4; Mathematical Genius in the Enlightenment.
[947] Titchmarsh, Edward C.: *The Theory of the Riemann Zeta-function*; Reprint of the 2nd Ed.; 2007; Oxford University Press; New York; ISBN 9780198533696; Revised by David R. Heath-Brown.
[948] Montgomery, Hugh; Nikeghbali, Ashkan; Rassia, Michael Th. (Eds.): *Exploring the Riemann Zeta Function*; 1st Ed.; 2017; Springer; New York; ISBN 9783319599687; 190 years from Riemann's Birth.
[949] Ivic, Aleksandar: *The Riemann Zeta-Function*; Reprint; 2003; Dover Publications; Mineola; ISBN 9780486428130; Theory and Applications.
[950] Wußing, Hans: *6000 Jahre Mathematik*; 1. Aufl.; 2013; Springer; Berlin; ISBN 9783642319983; II: Von Euler bis zur Gegenwart.
[951] Sautoy, Marcus du: *The Music of the Primes*; New Ed.; 2004; Harper Perennial; London; ISBN 9781841155807; Why an Unsolved Problem in Mathematics Matters.
[952] Engst, Judith; Morrien, Rolf: *Börse leicht verständlich*; 6., akt. u. erw. Aufl.; 2016; FinanzBuch Verlag; München; ASIN B0087GZB26; Von der Depot-Eröffnung zum optimalen Depot.
[953] Elstrodt, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie*; 7., korr. u. akt. Aufl.; 2011; Springer; Heidelberg; ISBN 9783642179044; Grundwissen Mathematik.
[954] Finch, Steven R.: *Mathematical Constants*; 1st Ed.; 2003; Cambridge University Press; Cambridge; ASIN B01DM25JGC; Encyclopedia of Mathematics and its Applications.
[955] Ackermann, Philip: *JavaScript*; 2. Aufl.; 2018; Rheinwerk Computing; Bonn; ISBN 9783836256964; Das umfassende Handbuch.
[956] Döge, Klaus (Hrsg.); Dvořák, Antonín (Komp.): *Symphony No. 9 in E minor*; 1. Aufl.; 2006; Eulenburg; Mainz; ISBN 9783795765125; Op. 95 'From the New World'.
[957] Iske, Armin: *Approximation*; 1. Aufl.; 2018; Springer; Berlin; ISBN 9783662554647; Springer-Lehrbuch Masterclass.
[958] Knabner, Peter; Barth, Wolf: *Lineare Algebra*; 2., überarb. und erw. Aufl.; 2018; Springer; Berlin; ISBN 9783662555990; Grundlagen und Anwendungen.
[959] Kast, Bas: *Der Ernährungskompass*; 1. Aufl.; 2018; Bertelsmann; Gütersloh; ASIN B077C2YK9T; Das Fazit aller wissenschaftlichen Studien zum Thema Ernährung.
[960] Voß, Herbert: *Mathematiksatz mit LaTeX*; 3., überarb. u. erw. Aufl.; 2018; Lehmanns; Berlin; ISBN 9783865419767; Computer & Internet.
[961] Wolf, Jürgen: *HTML5 und CSS3*; 3., akt. Aufl.; 2019; Rheinwerk Computing; Bonn; ISBN 9783836262262; Das umfassende Handbuch zum Lernen und Nachschlagen.
[962] Brandenburg, Martin: *Einführung in die Kategorientheorie*; 1. Aufl.; 2015; Springer; Berlin; ISBN 9783662470688; Mit ausführlichen Erklärungen und zahlreichen Beispielen.

[963] MacAskill, William: *Gutes besser tun*; 2. Aufl.; 2016; Ullstein; Berlin; ASIN B0187AFBDU; Wie wir mit effektivem Altruismus die Welt verändern können.
[964] Apostol, Tom M.: *Introduction to Analytic Number Theory*; 1st Ed.; 1976; Springer; New York; ISBN 9780387901633; Undergraduate Texts in Mathematics.
[965] Shapiro, Steart (Ed.): *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*; New Ed.; 2005; Oxford University Press; Oxford; ISBN 9780195148770; Oxford Handbooks in Philosophy.
[966] Überhuber, Christoph: *Computer-Numerik 1*; 1. Aufl.; 1995; Springer; Berlin; ISBN 9783540591511; Mit 157 Abbildungen.
[967] Überhuber, Christoph: *Computer-Numerik 2*; 1. Aufl.; 1995; Springer; Berlin; ISBN 9783540591528; Mit 73 Abbildungen.
[968] Koch, Manfred: *Von Schildkröten, Lügnern und sich selbst rasierenden Friseuren*; 1. Aufl.; 2017; Books on Demand; Norderstedt; ISBN 9783746084503; Klassische Paradoxa im Licht der modernen Mathematik.
[969] Ebbinghaus, Heinz-Dieter; Flum, Jörg; Thomas, Wolfgang: *Einführung in die mathematische Logik*; 6., überarb. u. erw. Aufl.; 2018; Springer Spektrum; Berlin; ISBN 9783662580295; Lehrbuch.
[970] Meier, Reto: *Professionelle Android-App-Entwicklung*; 1. Aufl.; 2019; Wiley-VCH; Weinheim; ISBN 9783527760589; Taschenbuch.
[971] Pickover, Clifford A.: *Das Mathebuch*; 1. Aufl.; 2013; Librero; Kerkdriel; ISBN 9789089982803; Von Pythagoras bis in die 57. Dimension.
[972] Hoffmann, Dirk W.: *Theoretische Informatik*; 4., akt. Aufl.; 2018; Carl Hanser; München; ISBN 9783446457935; Mit 295 Bildern, 26 Tabellen und 109 Aufgaben.
[973] Knuth, Donald Ervin: *The Art of Computer Programming Volume 2*; 3rd Ed.; 1997; Addison Wesley; Reading; ISBN 0201896842; Seminumerical Algorithms.
[974] Homeister, Matthias: *Quantum Computing verstehen*; 5., akt. u. erw. Aufl.; 2018; Springer Vieweg; Wiesbaden; ISBN 9783658228835; Grundlagen – Anwendungen – Perspektiven.
[975] Balzert, Helmut; Schröder, Marion; Schäfer, Christian: *Wissenschaftliches Arbeiten*; 2. Aufl.; 2017; Springer; Berlin; ISBN 9783961490066; Ethik, Inhalt & Form wiss. Arbeiten, Handwerkszeug, Quellen, Projektmanagement, Präsentation.
[976] Picheta, Dominik: *Nim in Action*; 1st Ed.; 2017; Manning; Shelter Island; ISBN 9781617293436; Programming Language.
[977] Muller, Jean-Michel; Brunie, Nicolas; Dinechin, Florent de et al.: *Handbook of Floating-Point Arithmetic*; 2nd Ed.; 2018; Birkhäuser; Basel; ISBN 9783319765266; Applied Mathematics.
[978] Kemper, Alfons; Eickler, André: *Datenbanksysteme*; 10., akt. u. erw. Aufl.; 2015; De Gruyter; Berlin; ISBN 9783110443752; Eine Einführung.
[979] Kühnel, Andreas: *C# 8 mit Visual Studio 2019*; 8., akt. Aufl.; 2019; Rheinwerk Computing; Bonn; ISBN 9783836264587; Das umfassende Handbuch.
[980] Zweig, Katharina: *Ein Algorithmus hat kein Taktgefühl*; 1. Aufl.; 2019; Heyne; München; ISBN 9783641250232; Wo künstliche Intelligenz sich irrt, warum uns das betrifft und was wir dagegen tun können.
[981] Haneke, Uwe; Trahasch, Stephan; Zimmer, Michael; Felden, Carsten (Hrsg.): *Data Science*; 1. Aufl.; 2019; dpunkt; Heidelberg; ISBN 9783864906107; Grundlagen, Architekturen und Anwendungen.
[982] Raschka, Sebastian; Mirjalili, Vahid: *Machine Learning mit Python und Scikit-learn und TensorFlow*; 2. Aufl.; 2018; MITP; Frechen; ISBN 9783958457355; Das umfassende Praxis-Handbuch für Data Science, Deep Learning und Predictive Analytics.
[983] Weitz, Edmund: *Konkrete Mathematik (nicht nur) für Informatiker*; 1. Aufl.; 2018; Springer Spektrum; Wiesbaden; ISBN 9783658215651; Mit vielen Grafiken und Algorithmen in Python.
[984] Bedürftig, Thomas; Murawski, Roman: *Philosophie der Mathematik*; 4., erw. u. überarb. Aufl.; 2019; de Gruyter; Berlin; ISBN 9783110545364; Electronic publication.
[985] Ertel, Wolfgang: *Grundkurs Künstliche Intelligenz*; 4. Aufl.; 2016; Springer Vieweg; Wiesbaden; ISBN 9783658135485; Eine praxisorientierte Einführung.
[986] Priest, Graham: *An Introduction to Non-Classical Logic*; 2nd Ed.; 2008; Cambridge University Press; New York; ISBN 9780521854337; From If to Is.
[987] Wißmann, Helge: *Der Zwillingsbeweis und die Goldbach'sche Vermutung*; 2. Aufl.; 2018; Books on Demand; Norderstedt; ISBN 9783746028798; Zahlentheorie.
[988] Hoffmann, Dirk W.: *Grundlagen der Technischen Informatik*; 1. Aufl.; 2007; Carl Hanser; München; ISBN 9783446406919; Mit 308 Bildern, 57 Tabellen und 90 Aufgaben.
[989] Widl, Markus: *Microsoft Office 365*; 5., akt. u. erw. Aufl.; 2019; Rheinwerk Computing; Bonn; ISBN 9783836269230; Das umfassende Handbuch.
[990] Papula, Lothar: *Mathematische Formelsammlung*; 12., überarb. Aufl.; 2017; Springer Vieweg; Wiesbaden; ISBN 9783658161941; Für Ingenieure und Naturwissenschaftler.

[991] Mückenheim, Wolfgang: *Die Mathematik des Unendlichen*; 1. Aufl.; 2006; Shaker; Aachen; ISBN 9783832255879; Berichte aus der Mathematik.
[992] Coppel, William A.: *Number Theory*; 2nd Ed.; 2009; Springer; New York; ISBN 9780387894850; An Introduction to Mathematics.
[993] Krizek, Michal; Luca, Florian; Somer, Lorenz: *17 Lectures on Fermat Numbers*; 1st Ed.; 2001; Springer; New York; ISBN 0387953329; From Number Theory to Geometry.
[994] Leuschner, Markus: *Mersenne- und Fermat-Primzahlen oder auf der Suche nach großen Primzahlen*; 1. Aufl.; 2010; GRIN Verlag; München; ISBN 9783656177357; Bachelorarbeit.
[995] McCarthy, Paul J.: *Arithmetische Funktionen*; 1. Aufl.; 2017; Springer Spektrum; Berlin; ISBN 9783662537329; Aus dem Englischen übersetzt von Markus Hablizel.
[996] Ribenboim, Paulo: *Thirteen Lectures on Fermat's Last Theorem*; 1st Ed.; 1979; Springer; New York; ISBN 9780387904320; Number theory.
[997] Bruder, Regina; Hefendehl-Hebeker, Lisa et al. (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik*; 1. Aufl.; 2015; Springer Spektrum; Berlin; ISBN 9783642351198; Kindle Ausgabe.
[998] Gustedt, Jens: *Modern C*; 1st Ed.; 2019; Manning; Shelter Island; ISBN 9781617295812; Programming Language.
[999] Martin, Robert C.: *Clean Code*; 1st Ed.; 2008; Prentice Hall; Upper Saddle River; ISBN 9780132350884; A Handbook of Agile Software Craftsmanship.
[1000] Whittaker, James A.: *Exploratory Software Testing*; 1st Ed.; 2009; Addison-Wesley; Boston; ISBN 9780341636416; Tips, Tricks, Tours, and Techniques to Guide Test Design.
[1001] Jehle, Roswitha; Czeschik, Johanna Christina et al. (Hrsg.): *Medizinische Informatik kompakt*; 1. Aufl.; 2015; De Gruyter; Berlin; ISBN 9783110339932; Ein Kompendium für Mediziner, Informatiker, Qualitätsmanager und Epidemiologen.
[1002] Hedderich, Jürgen; Sachs, Lothar: *Angewandte Statistik*; 16. Aufl.; 2018; Springer Spektrum; Heidelberg; ISBN 9783662566572; Methodensammlung mit R.
[1003] Lynch, Kevin M.; Park, Frank C.: *Modern Robotics*; 1st Ed.; 2017; Cambridge University Press; Cambridge; ISBN 9781107156302; Mechanics, Planning, and Control.
[1004] Scheid, Harald; Schwarz, Wolfgang: *Elemente der Geometrie*; 5. Aufl.; 2016; Springer Spektrum; Heidelberg; ISBN 9783662503232; Lehrbuch.
[1005] Handl, Andreas: *Multivariate Analysemethoden*; 2. Aufl.; 2010; Springer; Berlin; ISBN 9783642149870; Theorie und Praxis multivariater Verfahren unter besonderer Berücksichtigung von S-PLUS.
[1006] Lee, Patrick: *CoffeeScript in Action*; 1st Ed.; 2014; Manning; Shelter Island; ISBN 9781617290626; Programming Language.
[1007] Meyer, Robert: *Lernen wie Einstein*; 1. Aufl.; 2020; Independently published; ohne; ISBN 9798666699232; Geheimnisse und Techniken, um besser zu lernen, Kreativität zu entwickeln und das Genie in Ihnen zu entdecken.
[1008] Springer, Sebastian: *Node.js*; 3. Aufl.; 2018; Rheinwerk Computing; Bonn; ISBN 9783836262552; Das umfassende Handbuch.
[1009] Krypczyk, Veikko; Bochkor, Olena: *Handbuch für Softwareentwickler*; 1. Aufl.; 2018; Rheinwerk Computing; Bonn; ISBN 9783836244763; Professionelles Software Engineering.
[1010] Vasuki, A: *Nature-Inspired Optimization Algorithms*; 1st Ed.; 2020; CRC Press; Boca Raton; ISBN 9780367255985; Mathematics.
[1011] Grimm, Petra; Keber, Tobias; Zöllner, Oliver: *Digitale Ethik*; 1. Aufl.; 2019; Reclam; Ditzingen; ISBN 9783150152409; Reclam Kompaktwissen XL.
[1012] Hajen, Leonhard; Paetow, Holger; Schumacher, Harald: *Gesundheitsökonomie*; 8., akt. Aufl.; 2017; Kohlhammer; Stuttgart; ISBN 9783170319721; Strukturen - Methoden - Praxisbeispiele.
[1013] Andelfinger, Volker P.; Hänisch, Till (Hrsg.): *eHealth*; 1. Aufl.; 2016; Springer Gabler; Wiesbaden; ISBN 9783658122386; Wie Smartphones, Apps und Wearables die Gesundheitsversorgung verändern werden.
[1014] Pepels, Werner (hrsg.): *BWL - Wissen zur Existenzgründung*; 2. Aufl.; 2014; BWV Berliner Wissenschafts-Verlag; Berlin; ISBN 9783830532521; Wirtschaft.
[1015] Mandl, Heinz; Friedrich, Helmut Felix (Hrsg.): *Handbuch Lernstrategien*; 1. Aufl.; 2005; Hogrefe; Göttingen; ISBN 9783801718138; Psychologie.
[1016] Keller, Horst: *ABAP*; 4. Aufl.; 2016; Rheinwerk Computing; Bonn; ISBN 9783836241090; Die offizielle Referenz.
[1017] Huch, Renate; Jürgens, Klaus D. (Hrsg.): *Mensch Körper Krankheit*; 8. Aufl.; 2019; Urban & Fischer; München; ISBN 9783437267949; Anatomie Physiologie Krankheitsbilder.
[1018] Hensen, Peter: *Qualitätsmanagement im Gesundheitswesen*; 2. Aufl.; 2019; Springer Gabler; Wiesbaden; ISBN 9783658259129; Grundlagen für Studium und Praxis.

[1019] Land, Beate: *Das deutsche Gesundheitssystem - Struktur und Finanzierung*; 1. Aufl.; 2018; Kohlhammer; Stuttgart; ISBN 9783170308992; Wissen für Pflege- und Therapieberufe.
[1020] Melé, Antonio: *Django 3 By Example*; 3rd Ed.; 2020; Packt Publishing; Birmingham; ISBN 9781838981952; Build powerful and reliable Python web applications from scratch.
[1021] Malaka, Rainer; Butz, Andreas; Hussmann, Heinrich: *Medieninformatik*; 1. Aufl.; 2009; Pearson Studium; London; ISBN 9783827373533; Eine Einführung.
[1022] Herczeg, Michael: *Einführung in die Medieninformatik*; 1. Aufl.; 2006; Oldenbourg Wissenschaftsverlag; München; ISBN 9783486581034; Interaktive Medien.
[1023] Eisenmenger, Richard: *WordPress 5*; 1. Aufl.; 2019; Rheinwerk Computing; Bonn; ISBN 9783836256810; Das umfassende Handbuch.
[1024] Iwanowski, Sebastian; Lang, Rainer: *Diskrete Mathematik mit Grundlagen*; 1. Aufl.; 2014; Springer Vieweg; Berlin; ISBN 9783658071301; Lehrbuch für Studierende von MINT-Fächern 2014.
[1025] Burden, Richard L.; Faires, J. Douglas: *Numerical Analysis*; 9th Ed.; 2010; Brooks/Cole; Boston; ISBN 9780538733519; Mathematics.
[1026] Gabriel, Stephan: *Die Spuren Deines Lebens*; 1. Aufl.; 2019; Jbriels; Düsseldorf; ISBN 9783948481025; Der Wegbegleiter zu Deiner Biografie.
[1027] Winkler, Petra: *Meine Biografie selbst schreiben*; 1. Aufl.; 2016; Books on Demand; Norderstedt; ISBN 9783743114012; Das Selbstlernbuch zum Schreiben Ihrer Lebensgeschichte(n) als Taschenbuchausgabe.
[1028] Stoyanov, Jordan M.: *Counterexamples in Probability*; 3rd Ed.; 2013; Dover; Mineola; ISBN 9780486499987; Mathematics.
[1029] Arens, Tilo; Hettlich, Frank; Karpfinger, Christian et al.: *Mathematik*; 4. Aufl.; 2018; Springer Spektrum; Heidelberg; ISBN 9783662567401; Mit Matlab und R-Beispielen.
[1030] Ashwin, Pajankar; Sharvani, Chandu: *GNU Octave by Example*; 1st Ed.; 2019; Apress; New York; ISBN 9781484260852; A Fast and Practical Approach to Learning GNU Octave.
[1031] McKibben, Mark; Webster, Micah D.: *Differential Equations with MATLAB*; 1st Ed.; 2014; Chapman and Hall; Strand; ISBN 9781466557079; Exploration, Applications, and Theory.
[1032] Holzner, Steven; Sigg, Timm: *Differenzialgleichungen für Dummies*; 2. Aufl.; 2019; Wiley; Hoboken; ISBN 9783948481025; Lernen einfach gemacht.
[1033] Deuflhard, Peter: *Numerische Mathematik 2*; 4. Aufl.; 2013; de Gruyter; Berlin; ISBN 9783110316339; Gewöhnliche Differentialgleichungen.
[1034] Deuflhard, Peter: *Numerische Mathematik 3*; 2. Aufl.; 2020; de Gruyter; Berlin; ISBN 9783110691689; Adaptive Lösung partieller Differentialgleichungen.
[1035] Muller, Jean-Michel: *Elementary Functions*; 3rd Ed.; 2016; Birkhäuser; Basel; ISBN 9781489979810; Algorithms and Implementation.
[1036] Ray, Subrata: *Fortran 2018 with Parallel Programming*; 1st Ed.; 2019; Chapman and Hall; London; ISBN 9780367218430; Programming Language.
[1037] Schmidt, Bertil et al.: *Parallel Programming*; 1st Ed.; 2017; Apress; New York; ISBN 9781484257128; Concepts and Practice.
[1038] Browning, J. Burton; Sutherland, Bruce: *C++ Recipes*; 2nd Ed.; 2020; Morgan Kaufmann; Burlington; ISBN 9780128498903; A Problem Solution Approach.
[1039] Géron, Aurélien; Rother, Kristian; Demmig, Thomas: *Praxiseinstieg Machine Learning mit Scikit-Learn, Keras und TensorFlow*; 2. Aufl.; 2020; O'Reilly; Sebastopol; ISBN 9783960091240; Konzepte, Tools und Techniken für intelligente Systeme.
[1040] Richter, Eugen: *Android-Apps programmieren*; 3., überarb. Aufl.; 2021; mitp; Frechen; ISBN 9783747502167; Professionelle App-Entwicklung mit Android Studio 4.
[1041] Metcalf, Michael; Reid, John; Cohen, Malcolm: *Modern Fortran Explained*; 5th Ed.; 2018; Oxford University Press; Oxford; ISBN 9780198811893; Incorporating Fortran 2018.
[1042] Hansen, Eldon R.; Walster, William G.: *Global Optimization Using Interval Analysis*; 2nd Ed.; 2003; Taylor & Francis Inc.; Abingdon-on-Thames; ISBN 9780824740597; Revised and Expanded.
[1043] Held, Bernd: *VBA mit Access*; 3. Aufl.; 2019; Rheinwerk Computing; Bonn; ISBN 9783836269988; Das umfassende Handbuch mit VBA-Lösungen für Access 2010 bis Access 2019.
[1044] Vonhoegen, Helmut: *XML*; 9. Aufl.; 2018; Rheinwerk Computing; Bonn; ISBN 9783836265379; Einstieg, Praxis, Referenz.
[1045] Hattenhauer, Rainer: *Informatik*; 2. Aufl.; 2020; Pearson Studium; München; ISBN 9783868949124; Praxislehrbuch für Schule, Ausbildung und Studium.
[1046] Fraisse, Roland: *Theory of Relations*; 1st Ed.; 2000; North Holland; Amsterdam; ISBN 9780444505422; Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.
[1047] Stillwell, John: *Mathematics and Its History*; 3rd Ed.; 2010; Springer; Berlin; ISBN 9781441960528; Undergraduate Texts in Mathematics.

[1048] Karpfinger, Christian; Meyberg, Kurt: *Algebra*; 5. Aufl.; 2021; Springer Spektrum; Berlin; ISBN 9783662619513; Gruppen – Ringe – Körper.
[1049] Baird, Julia: *Victoria: The Queen*; 1st Ed.; 2016; Random House; New York; ISBN 9781400069880; An Intimate Biography of the Woman Who Ruled an Empire.
[1050] Strang, Gilbert: *Wissenschaftliches Rechnen*; 1. Aufl.; 2010; Springer; Heidelberg; ISBN 9783540784944; Masterclass.
[1051] Beck, Matthias; Robins, Sinai: *Das Kontinuum diskret berechnen*; 1. Aufl.; 2008; Springer; Berlin; ISBN 9783540795957; Lehrbuch.
[1052] Hanke-Bourgeois, Martin: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*; 3., akt. Aufl.; 2009; Vieweg+Teubner Verlag; Wiesbaden; ISBN 9783834807083; Studium.
[1053] Rao, Kamisetty Ramamohan; Kim, Do Nyeon; Hwang, Jae Jeong: *Fast Fourier Transform - Algorithms and Applications*; 1st Ed.; 2010; Springer; New York; ISBN 9781402066283; Signals and Communication Technology.
[1054] Föllinger, Otto: *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*; 11., überarb. Aufl.; 2021; VDE-Verlag; Berlin; ISBN 9783800783727; Bearbeitet von Mathias Kluwe.
[1055] Norvell, Peter; Russell, Stuart: *Artificial Intelligence*; 4th Ed.; 2021; Pearson; London; ISBN 9781292401133; A Modern Approach.
[1056] Brzeziński, Juliusz: *Galois Theory Through Exercises*; 1st Ed.; 2018; Springer; Berlin; ISBN 9783319723259; Springer Undergraduate Mathematics Series.
[1057] Parker, Matt (Vorwort): *The Maths Book*; 1st Ed.; 2019; Dorling Kindersley; London; ISBN 9780241350362; Big Ideas Simply Explained.
[1058] Robbins, Herbert; Courant, Richard: *What Is Mathematics?*; 2nd Ed.; 1996; Oxford University Press; Oxford; ISBN 9780195105193; An Elementary Approach to Ideas and Methods.
[1059] Otte, Michael (Hrsg.): *Mathematiker über die Mathematik*; 1. Aufl.; 1974; Springer; Berlin; ISBN 9783540068983; Wissenschaft und Öffentlichkeit.
[1060] Ash, Avner; Gross, Robert: *Elliptic Tales*; Ill. Ed.; 2012; Princeton University Press; Princeton; ISBN 9780691151199; Curves, Counting, and Number Theory.
[1061] Eichstädt, Timm; Spieker, Stefan: *52 Stunden Informatik*; 1. Aufl.; 2021; Springer Vieweg; Wiesbaden; ISBN 9783658334284; Was jeder über Informatik wissen sollte.
[1062] Magnus, Kurt; Popp, Karl; Sextro, Walter: *Schwingungen*; 9., überarb. Aufl.; 2013; Springer Vieweg; Berlin; ISBN 9783834825742; Mit 209 Abbildungen und 68 Aufgaben mit Lösungen.
[1063] Meister, Andreas: *Numerik linearer Gleichungssysteme*; 4., überarb. Aufl.; 2011; Vieweg +Teubner Verlag; Wiesbaden; ISBN 9783834815507; Eine Einführung in moderne Verfahren.
[1064] Thompson, Simon: *The Craft of Functional Programming*; 3rd Ed.; 2011; Addison Wesley; Upper Saddle River; ISBN 9780201882957; International Computer Science Series.
[1065] Lee, Kai-Fu; Qiufan, Chen: *AI 2041*; 1st Ed.; 2021; Currency; New York City; ISBN 9780593238295; Ten Visions for Our Future.
[1066] Strick, Heinz Klaus: *Mathematik – einfach genial!*; 1. Aufl.; 2020; Springer; Berlin; ISBN 9783662604489; Bemerkenswerte Ideen und Geschichten von Pythagoras bis Cantor.
[1067] Trangenstein, John A.: *Scientific Computing: Vol. I - Linear and Nonlinear Equations*; 1st Ed.; 2018; Springer; New York; ISBN 9783030098704; Texts in Computational Science and Engineering.
[1068] Trangenstein, John A.: *Scientific Computing: Vol. II - Eigenvalues and Optimization*; 1st Ed.; 2018; Springer; New York; ISBN 9783030098711; Texts in Computational Science and Engineering.
[1069] Karpfinger, Christian: *Höhere Mathematik in Rezepten*; 4. Aufl.; 2022; Springer Spektrum; Wiesbaden; ISBN 9783662633045; Begriffe, Sätze und zahlreiche Beispiele in kurzen Lerneinheiten.
[1070] Jarre, Florian; Stoer, Josef: *Optimierung*; 2. Aufl.; 2019; Springer Spektrum; Wiesbaden; ISBN 9783662588543; Einführung in mathematische Theorie und Methoden.
[1071] Plato, Robert: *Numerische Mathematik kompakt*; 5. Aufl.; 2021; Springer Spektrum; Berlin; ISBN 9783662641101; Grundlagenwissen für Studium und Praxis.
[1072] Schmidt, Gunther; Ströhlein, Thomas: *Relationen und Graphen*; 1. Aufl.; 1989; Springer; Berlin; ISBN 3540503048; Eine Einführung.
[1073] Lautsch, Erwin; Lienert, Gustav A.: *Binärdatenanalyse*; 1. Aufl.; 1993; Beltz; Weinheim; ISBN 36212711562; Für Psychologen, Mediziner und Sozialwissenschaftler.
[1074] Krauth, Joachim; Lienert, Gustav A.: *Die Konfigurationsfrequenzanalyse (KFA) und ihre Anwendung in Psychologie und Medizin*; Reprint; 1995; Beltz; Weinheim; ISBN 3621272585; Ein multivariates nichtparametrisches Verfahren zur Aufdeckung von Typen und Syndromen.
[1075] Gallico, Paul: *Mrs Harris Goes to Paris*; 1st Ed.; 2022; Bloomsbury Publishing; London; ISBN 9781526646620; Mrs Harris Goes to New York.

[1076] Whittaker, Edmund T.; Watson, George N.: *A Course of Modern Analysis*; 5th Ed.; 2021; Cambridge University Press; Cambridge; ISBN 9781316518939; An Introduction to the General Theory of Infinite Processes and of Analytic Functions With an Account of the Principal Transcendental Functions.
[1077] Stillwell, John: *Reverse Mathematics*; Repr. Ed.; 2019; Princeton Univers. Press; Princeton; ISBN 9780691196411; Proofs from the Inside Out.
[1078] Wallwitz, Georg von: *Meine Herren, dies ist keine Badeanstalt*; 1. Aufl.; 2017; Berenberg Verlag; Berlin; ISBN 9783946334248; Wie ein Mathematiker das 20. Jahrhundert veränderte.
[1079] Gray, Jeremy: *Henri Poincaré*; Ill. Ed.; 2012; Princeton Univers. Press; Princeton; ISBN 9780691152714; A Scientific Biography.
[1080] Bell, Eric Temple: *Men of Mathematics*; Ill. Ed.; 1986; Touchstone; New York; ISBN 9780671628185; Biographies.
[1081] Andrews, George E.: *Special Functions*; 1st Ed.; 2010; Cambridge University Press; Cambridge; ISBN? 9780521789882; Encyclopedia of Mathematics and its Applications Book 71.
[1082] Davis, Philip J.; Rabinowitz, Philip: *Methods of Numerical Integration*; 1st Ed.; 1984; Academic Press Inc.; Cambridge; ISBN 9780122063602; Computer Science & Applied Mathematics.
[1083] Kythe, Prem K.; Schäferkotter, Michael R.: *Computational Methods for Integration*; 1st Ed.; 2004; Chapman & Hall; London; ISBN 9781584884286; Handbook.
[1084] Klatte, Rudi et al.: *PASCAL-XSC*; 1. Aufl.; 1991; Springer; Berlin; ISBN 9783540537144; Sprachbeschreibung mit Beispielen.
[1085] Rooch, Aeneas: *Die Entdeckung der Unendlichkeit*; 1. Aufl.; 2022; Heyne Verlag; München; ISBN 9783453218185; Das Jahrhundert, in dem die Mathematik sich neu erfand (1870 - 1970).
[1086] Parker, Matt: *Damit hatte keiner gerechnet!*; Dt. Erstausg.; 2022; Goldmann Verlag; München; ISBN; Die größten Mathe-Irrtümer der Menschheit.
[1087] Krylov, Vladimir Ivanovich: *Approximate Calculation of Integrals*; Ill. Ed.; 2006; Dover Publications; New York; ISBN 9780486445793; Translated by Arthur H. Stroud.
[1088] Kline, Morris: *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times Volume 3*; Ill. Ed.; 1990; Oxford University Press; Oxford; ISBN 9780195061376; English Edition.
[1089] Wußing, Hans: *6000 Jahre Mathematik Eine kulturgeschichtliche Zeitreise - 2. Von Euler bis zur Gegenwart*; 2009. Edition; 2008; Springer Spektrum; Heidelberg; ISBN 9783642319983; Vom Zählstein zum Computer.
[1090] Neuschwander, Jürgen: *Rechnerarchitektur für Dummies*; 1. Aufl.; 2022; Wiley-VCH; Weinheim; ISBN 9783527718504; Lernen einfach gemacht.
[1091] Vince, John: *Mathematics for Computer Graphics*; 6th Ed.; 2022; Springer; London; ISBN 9781447175193; Undergraduate Topics in Computer Science.
[1092] Ireland, Kenneth F.; Rosen, Michael I.: *A Classical Introduction to Modern Number Theory*; 2nd Ed.; 1990; Springer; London; ISBN 9780387973296; Graduate Texts in Mathematics, Vol. 84.
[1093] Schilling, René L.; Kühn, Franziska: *Counterexamples in Measure and Integration*; 1. Aufl.; 2021; Cambridge University Press; Cambridge; ISBN 9781009001625; Analysis.
[1094] Aleksandrov, A. D.; Kolmogorov, A. N.; Lavrent'ev, M. A.: *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning*; 1st Ed.; 2003; Dover Publications Inc.; Mineola; ISBN 9780486409160; Three Volumes Bound as one.
[1095] Mollin, Richard A.: *Fundamental Number Theory with Applications*; 2nd Ed.; 2019; Routledge; Milton Park; ISBN 9780367387761; Discrete Mathematics and Its Applications.
[1096] Mollin, Richard A.: *Advanced Number Theory with Applications*; 1st Ed.; 2017; Routledge; Milton Park; ISBN 9781138113251; Discrete Mathematics and Its Applications.
[1097] Weitz, Edmund: *Differentialgeometrie (nicht nur) für Informatiker*; 1. Aufl.; 2019; Springer Spektrum; Berlin; ISBN 9783662604625; Mit vielen Grafiken und Visualisierungen in JavaScript.
[1098] Ziemer, William P.: *Modern Real Analysis*; 2nd Ed.; 2017; Springer; Cham; ISBN 9783319646282; Graduate Texts in Mathematics.
[1099] Fuchs, Dmitry; Tabachnikov, Serge: *Ein Schaubild der Mathematik*; 1. Aufl.; 2011; Springer; Berlin; ISBN 9783642129599; 30 Vorlesungen über klassische Mathematik.
[1100] Needham, Tristan: *Visual Differential Geometry and Forms*; 1st Ed.; 2021; Princeton University Press; Princeton; ISBN 9780691203690; A Mathematical Drama in Five Acts.
[1101] Baker, George A.; Graves-Morris, Peter: *Padé Approximants*; 2nd Ed.; 1996; Cambridge University Press; Cambridge; ISBN 9780521450072; Encyclopedia of Mathematics and its Applications Book.
[1102] Jaeger, Lars: *Emmy Noether*; 1. Aufl.; 2022; Südverlag; Hamburg; ISBN 9783878001614; Ihr steiniger Weg an die Weltspitze der Mathematik.
[1103] Backhaus, Klaus et al.: *Multivariate Analysemethoden*; 17., akt. Aufl.; 2023; Springer Gabler; Wiesbaden; ISBN 9783658404642; Eine anwendungsorientierte Einführung.

[1104] Baumgartner, Stefan: *TypeScript Cookbook*; 1st Ed.; 2023; O'Reilly Media; Sebastopol; ISBN 9781098136659; Real World Type-Level Programming.
[1105] Griffiths, David F.; Higham, Desmond J.: *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*; 1st Ed.; 2010; Springer; London; ISBN 9780857291479; Initial Value Problems.
[1106] Kitagawa, Kate; Revell, Timothy: *Die großen Unbekannten der Mathematik*; 1. Aufl.; 2023; Goldmann Verlag; München; ISBN 9783442316847; Warum die Geschichte der Mathematik älter, östlicher und weiblicher ist, als wir glauben.
[1107] Manenti, Riccardo; Motta, Mario: *Quantum Information Science*; 1st Ed.; 2023; Oxford University Press; Oxford; ISBN 9780198787488; Computer Science.
[1108] Walz, Guido (Hrsg.): *Lexikon der Mathematik*; 1. Aufl.; 2004; Springer Spektrum; Berlin; ISBN 9783827411594; A - Zyl + Registerband.
[1109] Nievergelt, Yves: *Wavelets Made Easy*; 1st Ed.; 2013; Birkhäuser; Basel; ISBN 9781461268239; Softcover reprint of the original 1st ed. 1999 Edition.
[1110] Lange-Eichbaum, Wilhelm; Kurth, Wolfram: *Genie, Irrsinn und Ruhm*; Reprint; 2000; Komet; Frechen; ISBN 9783933366603; Die geheimen Psychosen der Mächtigen.
[1111] Walter, Wolfgang: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*; 7. Aufl.; 2000; Springer; Berlin; ISBN 9783540676423; Eine Einführung.
[1112] Lemmermeyer, Franz: *4000 Jahre Zahlentheorie*; 1. Aufl.; 2023; Springer Spektrum; Berlin; ISBN 9783662681107; Geschichte - Kulturen - Menschen I. Von Babel bis Abel.
[1113] Hackbusch, Wolfgang: *Integralgleichungen*; 2. Aufl.; 2013; Vieweg + Teubner Verlag; Wiesbaden; ISBN 9783663103721; Theorie und Numerik.
[1114] Pan; Victor Y.: *Structured Matrices and Polynomials*; 1st Ed.; 2012; Birkhäuser; Boston; ISBN 9781461201298; Unified Superfast Algorithms.
[1115] Bini, Dario; Pan, Victor Y.: *Fundamental Computations with General and Dense Structured Matrices*; 1st Ed.; 1994; Birkhäuser; Boston; ISBN 9781461202653; Polynomial and Matrix Computations.
[1116] Ehrgott; Matthias: *Multicriteria Optimization*; 2nd Ed.; 2006; Springer; Berlin; ISBN 9783540276593; Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.
[1117] Borwein, Jonathan; Bailey, David: *Mathematics by Experiment*; 2nd Ed.; 2008; A K Peters/CRC Press; Wellesley; ISBN 9781568814421; Plausible Reasoning in the 21st Century.

Schlagwortverzeichnis

A • B • C • D • E • F • G • H • I • J • K • L • M • N • O • P • Q • R • S • T • U • V • W • X • Y • Z

A

Aktivitäten — Aktuell
Amplitude — Schwingungen
Änderungshistorie — Hauptseite
Anzahl — Mengenlehre
Arbeitsergebnisse — Gerechtes Verteilen

B

Band — Internet und Co
Bewegungsenergie — Schwingungen
Bitsort — Theoretische Informatik
Bücher — Literaturverzeichnis

D

Direktionsweg — Schwingungen
Diskussion — Schwingungen

E

Ebene — Schwingungen
Einheitskugel — Universum
Ellipsenpendel — Schwingungen
Erdtag — Zeitrechnung
Euklidische Geometrie — Mathematik, Euklidische Geometrie
Evolute — Schwingungen

F

Faszination — Interview
Feder — Schwingungen
Fehlerrechnung — Schwingungen
Fragen und Antworten — Fragen und Antworten
Funkrechnen — Funkrechnen

G

Gerechtes Verteilen — Mathematik, Gerechtes Verteilen
Gruppenbildung — Gerechtes Verteilen

H

Haase, Boris — Über mich
Halteproblem — Theoretische Informatik

I

Inhalte — Internet und Co
Internet — Internet und Co, Informatik
Intexverfahren — Lineare Optimierung

J

Jugend forscht — Schwingungen

K

Kalender — Zeitrechnung
Kleidung — Internet und Co
Krümmungsradius — Schwingungen

L

Lageenergie — Schwingungen
Längenrechnung — Zeitrechnung
Lektüre — Aktuell
Lepte — Zeitrechnung
Lineare Optimierung — Mathematik, Lineare Optimierung

M

Maschinen — Internet und Co
Mathematisches Pendel — Schwingungen
Menge — Mengenlehre
Mengenlehre — Mengenlehre, Mathematik
Monat — Zeitrechnung
Musik — Musik

N

Nichtstandardanalysis — Nichtstandardanalysis

O

Oktalsystem — Zeitrechnung
Okte — Zeitrechnung

P

P-NP-Problem — Theoretische Informatik
Periodendauer — Schwingungen
Pfeil — Programmieren mit Pfeil
Programmieren — Informatik, Programmieren mit Pfeil
Prüfungen — Internet und Co

R

Radixsort — Theoretische Informatik
Ratschläge — Ratschläge
Reihe — Schwingungen
Riemannsche Vermutung — Nichtstandardanalysis, Zahlentheorie
Ruhelage — Schwingungen

S

Schlagwörter — Schlagwortverzeichnis
Schwingung — Schwingungen
Simplexverfahren — Lineare Optimierung
Sortieren — Informatik, Theoretische Informatik
Spannenergie — Schwingungen
Suchen — Informatik, Theoretische Informatik
Superrechner — Informatik, Superrechner

T

Themen	Hauptseite
Theoretische Informatik	Theoretische Informatik
Topologie	Topologie
Transport	Internet und Co
Transzendente Zahlen	Mengenlehre, Zahlentheorie

U

Überblick	Einleitung
Unendlichkeit	Mengenlehre
Universum	Universum

V

Versuch	Schwingungen
Virtuelle Realität	Internet und Co

W

Wissenschaftliches Rechnen	Mathematik, Wissenschaftliches Rechnen
Woche	Zeitrechnung
Würfel	Universum

Z

Zahlentheorie	Zahlentheorie
Zeitrechnung	Mathematik, Zeitrechnung
Zykloidenpendel	Schwingungen

Definitionen und Glossar

A • B • C • D • E • F • G • H • I • J • K • L • M • N • O • P • Q • R • S • T • U • V • W • X • Y • Z

B

Band: Multifunktionsgerät mit diversen Funktionen der Neuen Medien.

E

Erdtag: zwischen Sonntag und Montag eingefügter Arbeitstag.
Etikett: Bezogenes eines Unterschiedenen.

I

ID: die jedem Menschen eindeutig zugeordnete Identifikationsnummer.

L

Lepte: achter Teil einer Okte, 64. Teil eines Tages.

O

Okte: achter Teil eines Tages.
Orbital: Bedeutungsumfeld eines Begriffs.

P

Pfeil: moderne Programmiersprache der Zukunft.

Q

Quaderschema: Zuordnung von Zahlen zur Menge der natürlichen Zahlen je Dimension.

S

Signatur: elektronisches Äquivalent zur Unterschrift.

U

Unterbewusstsein: die Teilprozesse des Geistes, die dem direkten Zugriff des Lebewesens entzogen sind.
URL, generische: URL, die Wildcards enthält.

W

Welt: für ein Subjekt zugängliche abgeschlossene Gesamtheit während eines Zeitabschnitts.

Z

Zahl: auswählende Kennzeichnung des Vielen und Konstruktion hieraus.

© 1983-2024 by Boris Haase